Feuille 9. Probabilités

EXERCICE 1
On lance deux dés. L'univers associé à cette expérience aléatoire est :
$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$$
Expliciter les évènements suivants et calculer leurs probabilités :
1. $A =$« le premier jet a donné 1 ».
2. $B =$« le double du premier jet a été inférieur ou égal au second ».
3. $C =$« la somme des deux dés est 4 ».
4. $D = B \cap C$.
5. $E =$« on a au moins un six ».
6. $F = \overline{E}$.

EXERCICE 2
On lance deux dés.
1. Préciser l'univers Ω associé à cette expérience. Quel est le cardinal de Ω ?
2. Soit D l'événement « on obtient un double six ». Calculer $P(D)$.
3. Pour tout $n \in \{2,3,\dots,12\}$, on note A_n l'événement « la somme des dés vaut n ». Calculer $P(A_n)$.

EXERCICE 3
Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire deux boules simultanément.
1. Préciser l'univers Ω associé à l'expérience, et son cardinal.
2. Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?

EXERCICE 4
Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire une boule, puis une seconde boule (sans remise de la première).
1. Préciser l'univers Ω associé à l'expérience, et son cardinal.
2. Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même parité ?

EXERCICE 5
Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire une boule, on la remet, puis on retire une boule.
1. Indiquer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité qu'elles aient la même parité ?

EXERCICE 6
Soit A,B,C trois évènements, associés à une expérience aléatoire quelconque. Exprimer les évènements suivant à l'aide des opérations habituelles sur les ensembles :
– Au moins un des évènements A,B,C est réalisé.
– Un et un seul des évènements A,B,C est réalisé.
– Au plus un des évènements A,B,C est réalisé.
– Au moins deux évèdements parmi A,B,C sont réalisés.

EXERCICE 7
On compose au hasard un numéro de téléphone (de dix chiffres).
1. Indiquer l'univers associé à l'expérience et son cardinal.
2. Quelle est la probabilité que tous les chiffres soient distincts ?
3. Quelle est la probabilité qu'il commence par 02 ?
4. Quelle est la probabilité que ses chiffres forment une suites strictement croissante ?

EXERCICE 8
Dans un supermarché se trouvent 150 packs de lait dont 50 avariés. Les acheteurs prennent un pack au hasard, dans l'ordre de leurs arrivées. Le but de l'exercice est de répondre à la question : vaut-il mieux être le premier, le deuxième,..., ou le 150-ème acheteur ?
1. On note $L_1, L_2, \dots, L_{150}$ les packs de lait, en convenant que $L_1, L_2, \dots, L_{50}$ sont avariés. Les 150 packs de lait sont achetés dans un certain ordre (aléatoire) : combien d'ordres existe-t-il ?
2. Parmi ces ordres, combien sont tels que le premier pack acheté est avarié ? Quelle est la probabilité pour que le premier client achète un pack avarié ?
3. Soit $k \in \{1,2,\dots,150\}$. Quelle est la probabilité pour que le k-ème client achète un pack avarié ? Conclure.

EXERCICE 9
Un placard contient 10 paires de chaussures (différentes). On prend quatre chaussures au hasard.
1. Introduire une notation pour les chaussures, décrire l'univers associé à l'expérience, et indiquer son cardinal.
2. Quelle est la probabilité de d'obtenir deux paires ?
3. ...au moins une paire ?
4. ...exactement une paire ?
5. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune paire ?

EXERCICE 10
Un joueur de poker reçoit une main de cinq cartes (d'un jeu de trente-deux cartes). Quelle est la probabilité que sa main contienne un carré ?

EXERCICE 11
On considère un groupe de quatre personnes. Pour simplifier, on appellera date d'anniversaire tout entier compris entre 1 et 365. Les dates d'anniversaire des quatre personnes forment ainsi une 4-liste (d_1,d_2,d_3,d_4).
1. Combien existe-t-il de listes possibles ?

2. Parmi elles, combien contiennent quatres dates différentes ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes parmi les quatre aient leurs anniversaires le même jour ?

4. Reprendre l'exercice avec n personnes, n étant un entier quelconque ≥ 2. On notera p_n la probabilité pour qu'un moins deux personnes parmi les n aient leur anniversaire le même jour. On exprimera p_n en fonction de n. On donnera (avec une calculatrice) une valeur approchée de p_{20}, p_{21}, p_{22}.

5. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux élèves de la classe aient leurs anniversaires le même jour ?

EXERCICE 12

Une famille a deux enfants.

1. Indiquer l'univers associé et donner son cardinal.

2. Quelle est la probabilité pour que le premier enfant soit une fille ?

3. Quelle est la probabilité pour que le second enfant soit une fille ?

4. Sachant que le premier enfant est une fille, quelle est la probabilité pour que le second soit une fille ?

5. Sachant qu'il y a au moins une fille, quelle est la probabilité pour qu'il y ait deux filles ?

EXERCICE 13

On lance deux dés. Calculer :

– la probabilité pour que le total obtenu soit 7 sachant qu'on a obtenu 1 avec le premier dé.

– la probabilité pour qu'on ait obtenu 1 avec le premier dé sachant que le total obtenu est 7.

– la probabilité pour que le total obtenu soit 10 sachant qu'on a obtenu 3 avec le premier dé.

EXERCICE 14

On tire successivement trois boules (sans remise) dans une urne qui contient 3 boules blanches et 7 noires. Pour tout $k \in \{1,2,3\}$, on note B_k l'événement « la k-ème boule tirée est blanche ». Calculer $P(B_1)$, $P_{B_1}(B_2)$, et $P_{B_1 \cap B_2}(B_3)$. En déduire la probabilité pour que les trois boules tirées soient blanches.

EXERCICE 15

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probilité d'obtenir 6 en les lançant est $1/2$. On prend un dé au hasard, on le lance, et on obtient 6.

1. Définir les événements importants associés à l'expérience.

2. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?

EXERCICE 16

Le quart d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte un douzième de malades. Parmi les malades, il y a quatre fois plus de non vaccinés. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

EXERCICE 17

Dans un magasin de CD, 5% des boîtes sont en mauvais état, 60% des boîtes abîmées contiennent un CD défectueux, et 98% des boîtes en bon état contiennent un CD en bon état. Un client achète un CD. On note A l'événement « la boîte achetée est abîmée », et D l'événement « le CD acheté est défectueux ».

1. Calculer $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P_A(D)$, $P_{\overline{A}}(D)$, $P_A(\overline{D})$, $P_{\overline{A}}(\overline{D})$.

2. Calculer $P(D)$.

3. Le client constate que son CD est dévectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

EXERCICE 18

Un élève a le choix entre quatre chemins A, B, C, D pour aller au lycée. La probabilité pour qu'il choisisse A (resp. B, C) est $1/3$ (resp. $1/4, 1/12$). La probabilité d'arriver en retard en passant par A (resp. B, C) est $1/20$ (resp. $1/10, 1/5$). En passant par D, on n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité pour que l'élève choisisse D ?

2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité pour qu'il soit passé par C ?

EXERCICE 19

On considère deux pièces de monnaie α et β. La pièce α est équilibrée, mais β donne « face »avec la probabilité $2/3$. On choisit une pièce au hasard, on la lance. Si on obtient « face », on la garde, sinon on change de pièce. On poursuit l'expérience indéfiniment. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons A_n l'événement « on a utilisé α pour le n-ème lancer », F_n l'événement « on a obtenu face au n-ème lancer ». On note enfin, $u_n = P(A_n)$ et $v_n = P(F_n)$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $P_{A_n}(F_n)$ et $P_{\overline{A_n}}(F_n)$. En déduire une expression de v_n en fonction de u_n.

2. Calculer u_1 puis v_1.

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les événements $A_n \cap F_n$, $A_n \cap \overline{F_n}$, $\overline{A_n} \cap F_n$, $\overline{A_n} \cap \overline{F_n}$ forment un système complet. Exprimer leurs probabilités en fonction de u_n.

4. Déterminer la probabilité de A_{n+1} sachant $A_n \cap F_n$, puis sachant $A_n \cap \overline{F_n}$, etc. En déduire une expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

5. Exprimer u_n puis v_n en fonction de n.

6. Quelle est la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$?