

Feuille 8. Dénombrement

EXERCICE 1

On considère un jeu de 32 cartes. On note :

- \heartsuit l'ensemble des cartes de coeur.
- \diamondsuit l'ensemble des cartes de carreau.
- \spadesuit l'ensemble des cartes de pique.
- \clubsuit l'ensemble des cartes de trèfle.

On note également T l'ensemble des cartes qui sont un valet, une dame, un roi, ou un as.

1. Calculer les cardinaux des ensembles introduits ci-dessus.
2. Calculer les cardinaux de leurs complémentaires.
3. Soit A l'ensemble des cartes qui sont noires et éléments de T . Exprimer A et \bar{A} en fonctions des ensembles introduits dans l'énoncé. Calculer les cardinaux de A et \bar{A} .
4. Même question avec l'ensemble B des cartes qui sont des trèfles n'appartenant pas à T .

EXERCICE 2

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

1. Factoriser puis simplifier l'expression :

$$G = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$$

2. Vérifier votre résultat sur un dessin.

EXERCICE 3

Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E , on note $A\Delta B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B , ou à B mais pas à A .

1. Faire un dessin de E, A, B sur lequel on mettra en valeur $A\Delta B$.
2. Exprimer $A\Delta B$ en fonction de A et B et des opérations usuelles (intersection, union, complémentaire).
3. Montrer que $A\Delta\bar{A} = E$.
4. Montrer que $A\Delta E = \bar{A}$.
5. Montrer que $A\Delta\emptyset = A$.

EXERCICE 4

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Que vaut $A\Delta B$ lorsque $A \subset B$?

EXERCICE 5

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E . Démontrer que :

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

EXERCICE 6

Expliciter l'ensemble $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$.

EXERCICE 7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Simplifier :

$$C = A \cap \overline{(A \cup B) \cap \bar{A}}$$

EXERCICE 8

Soit A une partie d'un ensemble E . Simplifier :

$$B = \overline{A \cap A \cap A \cap \bar{A}}$$

EXERCICE 9

Les élèves d'une classe ont la possibilité de pratiquer trois activités sportives a, b, c . Ils doivent en pratiquer au moins une mais ils peuvent en pratiquer plusieurs. On note A (resp. B, C) l'ensemble des élèves qui pratiquent l'activité a (resp. b, c). On suppose que :

- 12 élèves pratiquent l'activité a
- 7 élèves pratiquent l'activité b
- 9 élèves pratiquent l'activité c
- 1 élève pratique les activités a et b
- 2 élèves pratiquent les activités a et c
- 6 élèves pratiquent les activités b et c
- 1 élève pratique les trois activités

1. Reformuler ces données en termes de cardinaux d'ensembles.
2. Combien d'élèves compte la classe ?

EXERCICE 10

Pour son vélo, Toto possède un antivol à code. Le code est une succession de trois chiffres compris entre 0 et 9.

1. Toto a oublié son code. Combien de combinaisons doit-il essayer *dans le pire des cas* avant de retrouver la bonne ?
2. Même question en supposant que Toto se souvient que son code commence par un 8.
3. Même question en supposant que Toto se souvient que son code se termine par un chiffre pair.
4. Même question en supposant que Toto se souvient que son code ne contient que des chiffres pairs.
5. Même question en supposant que Toto se souvient que son code ne contient que des chiffres impairs.
6. Même question en supposant que Toto se souvient que son code contient au moins un chiffre pair.
7. Même question en supposant que Toto se souvient que son code contient exactement un chiffre pair.

EXERCICE 11

On s'intéresse ici aux mots que l'on peut écrire avec les lettres de l'alphabet, un mot étant une suite de lettres n'ayant pas nécessairement de sens.

1. Combien de mots de deux lettres existe-t-il ?

- Combien de mots de deux lettres identiques existe-t-il ?
- Combien de mots de deux lettres différentes existe-t-il ? On donnera, pour cette question, deux méthodes différentes.
- Combien de mots de deux lettres ont leurs lettres dans l'ordre alphabétique ?
- Reprendre les questions 1 et 3 pour des mots de n lettres ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque).

EXERCICE 12

Mon lecteur mp3 contient 32 morceaux de musique et une de ses fonctions permet d'en écouter 3 *différents* au hasard.

- Combien de possibilités existe-t-il pour cette écoute aléatoire de 3 morceaux ?
- Combien de possibilités existe-t-il si l'on suppose que le premier morceau joué est mon morceau préféré ?
- Combien de possibilités existe-t-il si l'on suppose que mon morceau préféré ne figure pas parmi les 3 morceaux joués ?
- Combien de possibilités existe-t-il si l'on suppose que les 3 morceaux joués sont mes 3 préférés ?
- Combien de possibilités existe-t-il si l'on suppose qu'aucun de mes 3 morceaux préférés ne figure parmi les 3 morceaux joués ?
- Quelle est la probabilité pour que les 3 morceaux joués soient mes 3 préférés ?

EXERCICE 13

Au Loto $\text{\textcircled{R}}$, un tirage est une succession de 6 boules numérotées. Les numéros sont compris entre 1 et 49.

- Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- Combien de tirage ne contiennent que des numéros impairs ?
- Combien de tirages contiennent le numéro 49 ?
- Combien de tirage ne contiennent que des numéros impairs dont le numéro 49 ?
- Combien de tirage ne contiennent que des numéros multiples de 3 ?
- Combien de tirage contiennent au moins un numéro multiple de 3 ?

EXERCICE 14

Soit E l'ensemble des nombres à quatre chiffres ne comportant aucun chiffre 0. Calculer :

- le nombre d'éléments de E
- le nombre d'éléments pairs de E
- le nombre d'éléments de E qui ont quatre chiffres différents
- le nombre d'éléments de E qui sont multiples de 5

EXERCICE 15

Calculer les coefficients binomiaux suivants :

$$a = \binom{4}{2}$$

$$b = \binom{6}{2}$$

$$c = \binom{6}{4}$$

$$d = \binom{6}{3}$$

$$e = \binom{7}{3}$$

$$f = \binom{15}{2}$$

$$g = \binom{15}{13}$$

EXERCICE 16

Calculer les coefficients binomiaux suivants :

$$h = \binom{3}{0}$$

$$i = \binom{2}{2}$$

$$j = \binom{21}{1}$$

$$k = \binom{17}{16}$$

$$l = \binom{25}{3}$$

$$m = \binom{16}{13}$$

EXERCICE 17

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$.

- Combien E a-t-il de parties à 2 éléments ?
- Expliciter ces parties ?

EXERCICE 18

Un ensemble E exactement 55 parties à deux éléments. Quel est le cardinal de cet ensemble ?

EXERCICE 19

On considère des mains de trois cartes choisies dans un jeu de 32 cartes.

- Quel est le nombre total de mains ?
- Combien existe-t-il de mains ne contenant que du carreau ?
- Combien y a-t-il de mains ne contenant que des cartes rouges ?
- Combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?
- Combien y a-t-il de mains contenant exactement un roi ?

6. Combien y-a-t-il de mains contenant trois rois ?
7. Combien de mains contiennent exactement deux rois ?
8. Combien de mains contiennent deux rois et un as ?
9. Combien de mains contiennent un roi rouge, un roi noir, et un as ?

EXERCICE 20

On considère des mains de cinq cartes choisies dans un jeu de 32 cartes.

1. Quel est le nombre total de mains ?
2. Combien existe-t-il de mains ne contenant que du carreau ou que du coeur ?
3. Combien y a-t-il de mains ne contenant que des cartes rouges ?
4. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?
5. Combien y-a-t-il de mains contenant exactement un roi ?
6. Combien y-a-t-il de mains contenant au moins deux as ?
7. Combien de mains contiennent exactement deux as ?
8. Combien de mains contiennent deux coeurs et trois trèfles ?

EXERCICE 21

Cet exercice suppose quelques notions de tarot. . .

1. Au tarot à quatre joueurs, combien existe-t-il de chiens possibles ?
2. Combien existe-t-il de chiens contenant les trois bouts ?
3. En déduire la probabilité pour que le chien contienne les trois bouts. On donnera le résultat sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers, puis on en donnera une écriture décimale approchée.

EXERCICE 22

Dans cet exercice, on appelle mot toute suite de lettres, qu'il ait un sens ou non.

1. Combien de mots de 6 lettres ne contenant que des a et des b existe-t-il ?
2. Combien de mots de 6 lettres contenant 1 a et 5 b existe-t-il ?
3. Combien de mots de 6 lettres contenant 2 a et 4 b existe-t-il ?
4. Combien de mots de 6 lettres contenant 3 a et 3 b existe-t-il ?
5. Plus généralement, soient $(n, u, v) \in \mathbf{N}^3$ tels que $n = u + v$. Combien existe-t-il de mot de n lettres contenant u lettres a et v lettres b ?

EXERCICE 23

Développer :

$$(a+b)^7$$

EXERCICE 24

Développer :

$$(a-b)^4$$

EXERCICE 25

Calculer :

$$(1+\sqrt{2})^4 + (1-\sqrt{2})^4$$

EXERCICE 26

On pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

1. Calculer $f(x)$.
2. En déduire :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

EXERCICE 27

Calculer :

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$$

$$B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

$$C = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^{n-k}$$

$$D = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

EXERCICE 28

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire $A = I + N$ où N est une matrice à préciser.
2. Vérifier que $N^2 = 0_2$.
3. En déduire A^n (pour $n \in \mathbf{N}$).

EXERCICE 29

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice N telle que $A = I + N$.
2. Vérifier que $N^3 = 0$.
3. En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

EXERCICE 30

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

EXERCICE 31

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.