

Feuille 7. Matrices

EXERCICE 1

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer :

$$A + (B - 2C) - ((A - B + 3C) - ((A - B) - (2B - C)))$$

EXERCICE 2

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer :

$$-(-(-A - (B + 4C)) - (4A - 7B + 8(C - A + B)) + 3A) - 5A + 2B - C$$

EXERCICE 3

Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4

Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 3X = -\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - 2X$$

EXERCICE 5

Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{R})$:

$$5 \left(X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) - \left(2X + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2X$$

EXERCICE 6

Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et où m est un paramètre réel :

$$\begin{pmatrix} 1+m & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + (m^2 - 1)X = \begin{pmatrix} 2 & 3m-1 \\ -2m+1 & m^2+4 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 7

Résoudre le système suivant, où les inconnues X et Y sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$:

$$\begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

EXERCICE 8

Résoudre le système suivant, où les inconnues X et Y sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$:

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \\ -X + 2Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

EXERCICE 9

Résoudre le système suivant, où les inconnues X et Y sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et où a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} aX + (a+1)Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

EXERCICE 10

Résoudre le système suivant, où les inconnues X, Y, Z sont des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ (on explicitera les solutions) :

$$\begin{cases} X - Y = I_3 \\ 2X + Y - Z = 0_3 \\ X + 2Y + Z = I_3 \\ X + Y - 2Z = 3I_3 \end{cases}$$

EXERCICE 11

Résoudre le système suivant, où les inconnues X, Y, Z sont des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ (on explicitera les solutions) :

$$\begin{cases} 2X - Y + Z = 0_3 \\ X + Y - 2Z = I_3 \\ -X + Y + Z = 0_3 \\ 2X + Y = I_3 \end{cases}$$

EXERCICE 12

Calculer :

$$(2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 13

Calculer :

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 14

Calculer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 15

Calculer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 16

Calculer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 17

Calculer :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} (213 \ 510 \ 128) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-2 \ 3 \ -1)$$

EXERCICE 18

Calculer :

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 19

Trouver toutes les matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

dont le carré est la matrice nulle.

EXERCICE 20

Trouver toutes les matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

dont le carré est la matrice unité.

EXERCICE 21

Trouver toutes les matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

dont le carré est égal à A .

EXERCICE 22

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2B^2 et $(AB)^2$.

EXERCICE 23

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 24

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

EXERCICE 25

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 26

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer A^2 en fonction de A .
2. En déduire que $A^n = 3^{n-1}A$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

EXERCICE 27

Soit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $(B - 3I_2)(B - 4I_2) = 0_2$.
2. Exprimer B^2 en fonction de I et B .
3. Définir par récurrence deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, B^n = a_n B + b_n I_2$$

4. Calculer a_n et b_n en fonction de n puis expliciter B^n .

EXERCICE 28

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^4 .
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 4. On a donc $n = 4q + r$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Exprimer A^n en fonction de A^r .
3. En déduire A^{51} .

EXERCICE 29

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & \frac{1}{2}b_n \\ 2b_n & a_n \end{pmatrix}$$

2. Calculer $a_n + b_n$ et $a_n - b_n$ en fonction de n .
3. En déduire A^n en fonction de n .

EXERCICE 30

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}$.

EXERCICE 31

La matrice suivante est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 32

La matrice suivante est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 33

La matrice suivante est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 34

La matrice suivante est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 35

La matrice suivante est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 36

La matrice suivante est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 37

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1} .
2. Résoudre l'équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 38

Soient $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que P est inversible. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

On en donnera deux démonstrations : l'une par récurrence, l'autre par un calcul « direct ».

EXERCICE 39

Dire pour chaque système s'il est de Cramer. Lorsque c'est le cas, le résoudre par une inversion de matrice.

$$\begin{cases} x+y = 2 \\ x-y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4y = 5 \\ -x+2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x+10y = 26 \\ x+y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 13x+2y = 0 \\ 6x+y = -4 \end{cases}$$

EXERCICE 40

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $r \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que si $A^r = 0_n$, alors $I_n - A$ est inversible et son inverse est $I_n + A + A^2 + \dots + A^{r-1}$. Calculer ainsi l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 41

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a et b la matrice A est-elle inversible ? Donner alors son inverse.

EXERCICE 42

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

2. Résoudre le système linéaire :

$$(S) \begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$