

Feuille 5. Sommes

EXERCICE 1

Écrire le nombre suivant sans le symbole Σ (on ne demande pas de le calculer) :

$$\sum_{i=1}^n \ln(i)$$

EXERCICE 2

Écrire le nombre suivant sans le symbole Σ (on ne demande pas de le calculer) :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \ln(i+1)$$

EXERCICE 3

Écrire le nombre suivant sans le symbole Σ (on ne demande pas de le calculer) :

$$\sum_{i=2}^{n+1} \ln(i-1)$$

EXERCICE 4

Écrire le nombre suivant sans le symbole Σ puis le calculer :

$$\sum_{i=1}^n 1$$

EXERCICE 5

Écrire le nombre suivant sans le symbole Σ puis le calculer :

$$\sum_{i=1}^{2008} (-1)^i$$

EXERCICE 6

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$\ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \dots + \ln(42)$$

EXERCICE 7

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

EXERCICE 8

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$\frac{1}{1+1!} + \frac{4}{1+2!} + \frac{9}{1+3!} + \dots + \frac{100^2}{1+100!}$$

EXERCICE 9

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 103$$

EXERCICE 10

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$-1 + 2 - 3 + 4 + \dots - 103$$

EXERCICE 11

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$2 + 4 + 6 + \dots + 248$$

EXERCICE 12

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$1 + 3 + 5 + \dots + 249$$

EXERCICE 13

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$1000 + 1010 + 1020 + \dots + 1540$$

EXERCICE 14

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$$

EXERCICE 15

Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ (on ne demande pas de la calculer) :

$$3 - 6 + 9 - 12 + \dots + 303$$

EXERCICE 16

Écrire la somme suivante en faisant en sorte que la première valeur de l'indice soit 0 :

$$\sum_{i=10}^{20} i$$

EXERCICE 17

Écrire la somme suivante en faisant en sorte que la première valeur de l'indice soit 0 :

$$\sum_{k=-4}^{180} \frac{k}{k+5}$$

EXERCICE 18

Écrire la somme suivante en faisant en sorte que la première valeur de l'indice soit 0 :

$$\sum_{i=2}^{45} 1$$

EXERCICE 19

Écrire la somme suivante en faisant en sorte que la première valeur de l'indice soit 0 :

$$\sum_{i=1}^n i$$

Même question en remplaçant 0 par 49.

EXERCICE 20

Changer d'indice dans la somme suivante pour que le terme général soit plus simple :

$$\sum_{i=0}^n \frac{(i+1)^2 + 3}{1 + \sqrt{i+1}}$$

EXERCICE 21

Changer d'indice dans la somme suivante pour que le terme général soit plus simple :

$$\sum_{k=3}^{n+2} \frac{x^{k-3}}{(k-3)!}$$

EXERCICE 22

Changer d'indice dans la somme suivante pour que le terme général soit plus simple :

$$\sum_{i=1}^{n+1} (i-1)2^i + 3^{i-1}$$

EXERCICE 23

Calculer :

$$\sum_{i=1}^n (2i^3 + 3i^2 + i - 1)$$

EXERCICE 24

Calculer :

$$\sum_{i=0}^n \left(2^i + \left(\frac{1}{2} \right)^i \right)$$

EXERCICE 25

Calculer :

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{3^i}$$

EXERCICE 26

Calculer :

$$\sum_{i=0}^n 2^{2i+1}$$

EXERCICE 27

Calculer :

$$\sum_{i=n}^{2n} i$$

EXERCICE 28

Calculer :

$$\sum_{i=n}^{2n} 1$$

EXERCICE 29

Calculer :

$$\sum_{i=n}^{2n} (i+1+n)$$

EXERCICE 30

Calculer :

$$\sum_{i=1}^n ((-2)^i + i)$$

EXERCICE 31

Calculer :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

EXERCICE 32

Calculer :

$$2 + 4 + 6 + \dots + 100$$

EXERCICE 33

Calculer :

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99$$

EXERCICE 34

Calculer :

$$\sum_{i=-n}^n (i+1)$$

EXERCICE 35

Calculer :

$$\sum_{i=1}^n 4i(i^2 - 1)$$

EXERCICE 36

En partant de la somme géométrique :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

retrouver la somme géométrique dérivée :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{i=0}^n ix^{i-1} = \dots$$

En déduire $\sum_{i=0}^n ix^i$.

EXERCICE 37

Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

1. Calculer la « somme géométrique dérivée deux fois » :

$$\sum_{i=0}^n i(i-1)x^{i-2}$$

2. En déduire $\sum_{i=0}^n i(i-1)x^i$

3. En déduire $\sum_{i=0}^n i^2 x^2$

EXERCICE 38

Calculer :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

EXERCICE 39

Calculer :

$$1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}$$

EXERCICE 40

Calculer :

$$\sum_{k=1}^{2n} k(2k-1)(k+1)$$

EXERCICE 41

Calculer :

$$-8 \cdot 7^2 + 8 \cdot 7^3 - 8 \cdot 7^4 + \dots - 8 \cdot 7^{1000}$$

EXERCICE 42

Calculer :

$$\sum_{i=0}^n \frac{3}{10^i}$$

EXERCICE 43

Calculer :

$$\sum_{i=0}^{2n} 3 \cdot 4^{i+1}$$

EXERCICE 44

Calculer :

$$\sum_{i=0}^n \frac{5 \cdot 2^i}{3^{i+1}}$$

EXERCICE 45

Calculer :

$$\sum_{i=0}^{n+1} 3^{2i+1}$$

EXERCICE 46

Calculer :

$$\sum_{i=3}^{n+1} \frac{2^i}{3^{i+2}}$$

EXERCICE 47

Calculer :

$$\sum_{i=1}^n (5 \cdot 2^i + 2 \cdot 3^i)$$

EXERCICE 48

Calculer :

$$\sum_{k=3}^{2n} 2^{3k+1} \cdot \frac{3^{k+1}}{4^k}$$

EXERCICE 49

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -1\}$:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

En déduire :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$$

EXERCICE 50

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) - na_n$$

EXERCICE 51

Calculer :

$$\sum_{i=1}^{50} \frac{1}{i} - \sum_{k=3}^{51} \frac{1}{k}$$

EXERCICE 52

Calculer :

$$\sum_{i=-2}^{40} (10i + 4)$$

EXERCICE 53

Calculer :

$$\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{i}{i+1}\right)$$

EXERCICE 54Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbf{N}, a_{n+1} = 5a_n - 2 \end{cases}$$

Calculer :

$$\sum_{i=0}^n a_i$$

EXERCICE 55Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Calculer :

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i$$

EXERCICE 56Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n \end{cases}$$

Calculer :

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i$$