

## Feuille 4. Récurrence et suites

### EXERCICE 1

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique dont on notera  $r$  la raison. Sachant que  $u_0 = 2$  et  $r = -3$ , calculer  $u_{10}$  et  $u_{20}$ .

### EXERCICE 2

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique. Sachant que  $u_0 = 2$  et  $u_1 = 5$ , calculer  $u_2$  et  $u_5$ .

### EXERCICE 3

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique. Sachant que  $u_5 = 17$  et  $u_{10} = 12$ , calculer  $u_0$  et  $u_1$ .

### EXERCICE 4

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $r = \frac{1}{4}$ . Sachant que  $u_0 = 32$ , calculer  $u_1, u_2, u_3$ .

### EXERCICE 5

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique. Sachant que  $u_0 = -1$  et  $u_{10} = 1$ , calculer  $u_0$ .

### EXERCICE 6

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique. Sachant que  $u_0 = 3$  et  $u_2 = 12$ , calculer  $u_1$  et  $u_5$ .

### EXERCICE 7

Poursuivre en ayant le moins d'imagination possible :

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$$

### EXERCICE 8

Poursuivre en ayant le moins d'imagination possible :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

### EXERCICE 9

Poursuivre en ayant le moins d'imagination possible :

$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, \dots$$

### EXERCICE 10

Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose :

$$u_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

1. Calculer  $u_n$  pour  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .
2. Conjecturer une formule simple pour  $u_n$ .
3. Démontrer que cette formule est vraie.

### EXERCICE 11

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$$

1. Calculer  $u_n$  pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .
2. Conjecturer une formule simple pour  $u_n$ .
3. Démontrer que cette formule est vraie.

### EXERCICE 12

Posons  $u_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

1. Calculer  $u_n$  pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .
2. Conjecturer une formule simple pour  $u_n$ .
3. Démontrer que cette formule est vraie.

### EXERCICE 13

Pour tout entier  $n \geq 3$ , on note  $d_n$  le nombre de diagonales d'un polygone à  $n$  sommets.

1. Calculer  $d_n$  pour  $n = 3, 4, 5, 6$ .
2. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 3$  :

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

3. Combien de diagonales possède un myriagone (10000 sommets) ?

### EXERCICE 14

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) \end{cases}$$

1. Calculer  $u_n$  pour  $n = 0, 1, 2, 3$ .
2. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$$

### EXERCICE 15

On place 1000 euros, avec intérêts annuels composés (c'est-à-dire qu'à la fin de chaque année, les intérêts sont incorporés au capital), à un taux de 2%. On note  $u_n$  la somme, en euros, dont on dispose à la fin de la  $n$ -ème année, en convenant que  $u_0 = 1000$ .

1. Calculer  $u_n$  pour  $n = 0, 1, 2$ .
2. Calculer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ . Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ?
3. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Après combien d'années dispose-t-on d'au moins 2000 euros ?

### EXERCICE 16

On place 2000 euros, avec intérêts annuels composés (c'est-à-dire qu'à la fin de chaque année, les intérêts sont incorporés au capital), à un taux de 4%, et on ajoute au capital 1000 euros au début de chaque année suivante. On note  $u_n$  la somme, en euros, dont on dispose à la fin de la  $n$ -ème année, en convenant que  $u_0 = 2000$ .

1. Calculer  $u_n$  pour  $n = 0, 1, 2$ .
2. Calculer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ . Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ?
3. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Après combien d'années dispose-t-on d'au moins 29000 euros ?

**EXERCICE 17**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases}$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = (2 + \sqrt{3})^{2^n} + (2 - \sqrt{3})^{2^n}$$

**EXERCICE 18**

Soit  $(u_n)$  une suite qui est à la fois arithmétique de raison  $r$  et géométrique de raison  $q$ . Démontrer que  $(u_n)$  est constante.

**EXERCICE 19**

Exprimer  $a_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, a_{n+1} = -a_n + 1 \end{cases}$$

**EXERCICE 20**

Exprimer  $b_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, b_{n+1} = 5b_n + 6 \end{cases}$$

**EXERCICE 21**

Exprimer  $c_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{cases} c_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, c_{n+1} = 2c_n + 2 \end{cases}$$

**EXERCICE 22**

Exprimer  $d_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{cases} d_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N}, d_{n+1} = -4d_n - 1 \end{cases}$$

**EXERCICE 23**

Exprimer  $e_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{cases} e_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, e_{n+1} = 2e_n + 4 \end{cases}$$

**EXERCICE 24**

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

**EXERCICE 25**

Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$$

**EXERCICE 26**

Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, w_{n+2} = 6w_{n+1} - 9w_n \end{cases}$$

**EXERCICE 27**

On définit une suite par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = -2u_n + n^2 - 2 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe des réels  $a, b, c$  tels que la suite définie par :

$$v_n = u_n + an^2 + bn + c$$

soit géométrique. En déduire une expression simple de  $u_n$  en fonction  $n$ .

**EXERCICE 28**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 1$ . Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 29**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = 2u_n + 3$ . Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 30**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$ . Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 31**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 6$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ . Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 32**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$ . On pose  $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ . Montrer que  $(v_n)$  est géométrique. En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 33**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}$ . On pose  $v_n = u_n^2$ . Montrer que  $(v_n)$  est géométrique. En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 34**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_1 = \frac{1}{3}$  et  $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}u_n$ . On pose  $v_n = \frac{u_n}{n}$  pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que  $(v_n)$  est géométrique. En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 35**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 3$ , et  $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n$ . Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 36**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ , et  $u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n$ . Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 37**

Démontrer que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $2^n > n$ .

**EXERCICE 38**

Démontrer que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $3^n > n$ .

**EXERCICE 39**

Notons  $u_n$  le nombre de poignées de main lorsque  $n$  personnes ( $n \geq 2$ ) se serrent la main.

1. Calculer  $u_n$  pour  $n = 2, 3, 4, 5$ .
2. Démontrer par récurrence que :

$$u_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

**EXERCICE 40**

Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**EXERCICE 41**

Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**EXERCICE 42**

Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$