

Feuille 19. Espaces vectoriels

EXERCICE 1

On pose :

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Écrire le vecteur v comme une combinaison linéaire des vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2

Dire, pour chaque famille (u_1, u_2, u_3) de vecteurs, si elle est libre ou liée :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3

Soient a, b, c trois réels, tous différents. Démontrer que les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

forment une famille libre.

EXERCICE 4

Démontrer que les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

engendrent \mathbf{R}^3 .

EXERCICE 5

Pour quelle(s) valeur(s) de a la famille suivante est-elle libre ?

$$u = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

EXERCICE 6

Soit F l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que :

$$x + y + z = 0$$

Soient :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $F = \text{Vect}(u, v)$.

EXERCICE 7

Soit m un réel. On considère les vecteurs :

$$\begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

La famille formée par ces vecteurs est-elle libre ?

EXERCICE 8

Dire (en justifiant), pour chacun des ensembles suivants, si c'est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^2 . Dans tout les cas, en faire un dessin.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, y = x^2 \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, y = 2x \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, x \in \mathbf{R} \right\}$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = 0 \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, y - |x| = 0 \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R} \right\}$$

EXERCICE 9

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 . À chaque fois, en donner une base.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3, x - 2y + 3z = 0 \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -3x+2y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0 \right\}$$

EXERCICE 10

On pose :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4, x+y+z+t=0 \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4, x-y+z-t=0 \right\}$$

Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^4 . Donner une base pour chacun des sous-espaces vectoriels $E, F, E \cap F$.

EXERCICE 11

Soit f l'application linéaire $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$
4. La fonction f est-elle injective ?
5. Est-elle surjective ?

EXERCICE 12

Soit $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Que valent m et n ?
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(g)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(g)$.
4. Étudier l'injectivité et la surjectivité de g .

EXERCICE 13

On définit une fonction $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ en posant :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
3. Étudier l'injectivité de f .
4. Étudier la surjectivité de f .

EXERCICE 14

On définit une fonction $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ en posant :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que f n'est pas linéaire.

EXERCICE 15

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice et $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$. On suppose A inversible. Démontrer que f est bijective et que f^{-1} est l'application linéaire $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie par $f^{-1}(Y) = A^{-1}Y$.

EXERCICE 16

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A . Soit $a \in \mathbf{R}$ tel qu'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbf{R}^2$ tel que $f(X) = aX$. Démontrer que $a = -1$ ou $a = 2$.

EXERCICE 17

Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$\begin{pmatrix} -1-t & 0 & 1 \\ -3 & 4-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de t l'application f est-elle injective ?

EXERCICE 18

Soit $T : \mathbf{R}_2[X] \rightarrow \mathbf{R}_2[X]$ l'application définie par $T(P(X)) = P(X+1) - P(X)$.

1. Démontrer que T est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau de T .
4. Déterminer l'image de T .
5. T est-il injectif ? Surjectif ?

EXERCICE 19

Soit $T : \mathbf{R}_2[X] \rightarrow \mathbf{R}_2[X]$ l'application définie par $T(P(X)) = P'(X)$.

1. Démontrer que T est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau de T .
4. Déterminer l'image de T .
5. T est-il injectif ? Surjectif ?