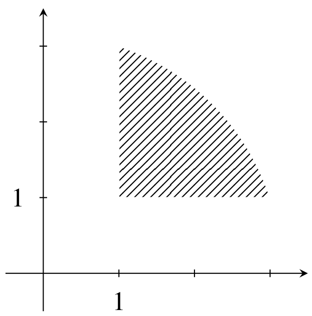
Feuille 18 : fonctions de deux variables

EXERCICE 1
Représenter graphiquement les ensembles suivants. Dire dans chaque cas si l'ensemble est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, x+2y+1<0\}\\
B &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, x-y-1\geq 0\}\\
C &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, y-|x|\geq 0\}\\
D &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, |x|+|y|\leq 1\}\\
E &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, |y-1|+x>0\}\\
F &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, x^2+y^2=4\}\\
G &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, x^2+y^2\leq 1\}\\
H &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, (x-1)^2+(y-1)^2<1\}\\
I &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, x^2+y^2<1 \text{ et } x>0\}\\
J &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, x^2+y^2<1 \text{ ou } x>0\}\\
K &= \{(x,y)\in\mathbf{R}^2, x^2<1 \text{ et } x+y>1 \text{ et } y<x\}
\end{aligned}$$

EXERCICE 2
Mettre en (in)équation(s) l'ensemble ouvert U dessiné ci-dessous. Le bord courbe est un arc de cercle centré en l'origine : on commencera par calculer son rayon.



EXERCICE 3
Pour chaque fonction, donner son domaine de définition, sa régularité, et calculer ses deux dérivées partielles d'ordre 1 et ses quatre dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
a(x,y) &= x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\\
b(x,y) &= \ln(x^2+y^2)\\
c(x,y) &= (x^2+y^2)e^{-xy}\\
d(u,v) &= (u^2-v)(3u^2-v)\\
e(s,t) &= s^2+t^2+(3-s-t)^2\\
f(x,y) &= y^2-3x^2y\\
g(x,y) &= x(\ln y)^2+y^2\\
h(x,y) &= (\ln y)^2+2\ln y+x^2\\
i(x,y) &= \frac{x-y}{x^2+y}
\end{aligned}$$

EXERCICE 4
Étudier, après avoir donné le domaine de définition et la régularité, les extremums locaux des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
a(x,y) &= x^2+xy+y^2\\
b(x,y) &= x((\ln x)^2+y^2)\\
c(x,y) &= x^2y+\ln(1+y^2)\\
d(x,y) &= 3xy-x^3-y^3\\
e(x,y) &= x^3+3xy^2-15x-12y\\
f(x,y) &= x^2-x+xy^2-xy\\
g(x,y) &= \frac{1}{3}y^3-y^2+x^2y+x^3-3x^2-\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

EXERCICE 5
Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U=]0,1[^2$ par $f(x,y)=(1-x)^4+(1-y)^4+(x+y)^4$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.
2. Montrer que f a un unique point critique (x_0,y_0) et calculer ce point.
3. Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 2 au point (x_0,y_0). La fonction f a-t-elle un extremum local en ce point ?

EXERCICE 6
Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $g(x,y)=2e^{-x}+3x^2-2xy+y^2$.

1. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g.
3. Démontrer que l'équation $2x-e^{-x}=0$ a une unique solution $\alpha\in\mathbf{R}$ (on pourra introduire une fonction auxiliaire).
4. Montrer que g a un unique point critique qui est $M=(\alpha,\alpha)$.
5. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de g.
6. Montrer que g présente en M un minimum local de valeur $2\alpha(2+\alpha)$.