Feuille 17 : probabilités discrètes

EXERCICE 1
On lance une pièce équilibrée indéfiniment. On pose :

$$A = \text{« on n'obtient que des piles »}$$

Et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$A_n = \text{« on obtient face au } n\text{-ème lancer »}$$

$$B_n = \text{« on obtient le premier face au } n\text{-ème lancer »}$$

1. Exprimer B_n en fonction de $A_1, A_2, \dots, A_n$.
2. En déduire $P(B_n)$.
3. Exprimer $\overline{A}$ en fonction des B_n.
4. En déduire $P(A)$. Comment appelle-t-on un tel événement A ?

EXERCICE 2
1. Un tirage au Loto est une combinaison (l'ordre ne compte pas) de 6 numéros distincts compris entre 1 et 49. Quelle est la probabilité (on donne : $\binom{49}{6} = 13983816$), notée p dans la suite, de gagner (c.a.d. d'avoir les 6 bons numéros) au Loto ?
2. On joue au loto indéfiniment et on définit une évènement en posant :

$$A = \text{« on gagne au moins une fois »}$$

Et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$A_n = \text{« on gagne pour la première fois au } n\text{-ème tirage »}$$

$$B_n = \text{« on gagne au } n\text{-ème tirage »}$$

3. Exprimer A_n à l'aide des B_k. En déduire $P(A_n)$ en fonction de p.
4. En déduire $P(A)$ en exprimant A à l'aide des A_n. Comment appelle-t-on un tel A ?

EXERCICE 3
Bob et Toto lancent une même pièce équilibrée à tour de rôle. C'est Bob qui commence. Le premier joueur qui obtient face gagne la partie.
1. Qui, selon vous, a le plus de chances de gagner ? On ne demande pas de justification (pour l'instant).
2. On pose :

$$B = \text{"Bob gagne"}$$
$$T = \text{"Toto gagne"}$$
$$F = \text{"le jeu se termine"}$$

Et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note :

$$A_n = \text{"le } n\text{-ème lancer a donné face"}$$

$$A'_n = \text{"le } n\text{-ème lancer a donné le premier face"}$$

   a. Exprimer A'_n en fonction des A_k. En déduire $P(A'_n)$.
   b. Exprimer F en fonction des A'_n. En déduire $P(F)$. Que dire de F ?
   c. Exprimer B en fonction des A'_n. En déduire $P(B)$.
   d. Calculer $P(T)$ de deux manières.
   e. Justifier la réponse à la question 1.
   f. Si Bob perd, il donne 2 euros à Toto. Si Toto perd, il donne 1 euro à Bob. Soit X le gain algébrique de Toto. Déterminer l'espérance de X. Toto a-t-il intérêt à jouer ?

EXERCICE 4
On lance une pièce une infinité de fois. La pièce n'est pas nécessairement équilibrée : elle donne « pile » (P) avec une probabilité $p \in]0,1[$ et « face » (F) avec la probabilité $q = 1 - p$.
1. Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'événement « on obtient la séquence PF pour la première fois aux lancers n et $n+1$ » et B_n l'événement « on obtient P au lancer n ». Exprimer A_n à l'aide des B_k puis calculer la probabilité de A_n.
2. Soit A l'événement « on obtient PF au moins une fois ». Calculer $P(A)$.

EXERCICE 5
On lance deux dés équilibrés et on répète ceci indéfiniment. Quelle est la probabilité pour que le premier six obtenu le soit à l'occasion d'un double six ?

EXERCICE 6
On effectue une suite de lancers avec une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et pile avec la probabilité $q = 1 - p$. L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs. Pour tout entier $n \geq 1$ on note U_n l'événement : « on obtient deux faces de suite, pour la première fois aux lancers numéros n et $n+1$ », et on pose $u_n = P(U_n)$. Pour tout entier $n \geq 2$, on note :
– A_n l'événement : « les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le $n^{ième}$ lancer donne face ».
– B_n l'événement : « les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le $n^{ième}$ lancer donne pile ».
et on pose $x_n = P(A_n)$ et $y_n = P(B_n)$.

1. **Compréhension**

   a. Déterminer u_1, x_2, y_2, u_2, x_3, y_3 et u_3.
   b. Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n.
   c. Pour tout $n \geq 2$ déterminer les probabilités conditionnelles :

$$P_{A_n}(A_{n+1}),\ P_{B_n}(A_{n+1}),\ P_{A_n}(B_{n+1}),\ P_{B_n}(B_{n+1})$$

   d. En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = p \cdot y_n \\ y_{n+1} = q\,(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. **On suppose maintenant que** $p = q = 1/2$

a. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions : $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Déterminer pour tout entier $n \geq 2$ y_{n+2} en fonction de y_{n+1} et de y_n. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $2^n y_n = f_n$.

b. On pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'on a pour tout $n \geq 0$, $f_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

c. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, une expression de x_n, puis de u_n en fonction de n, α, β.

d. Montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} u_n = 1$.

e. Soit U l'évènement « on obtient, au moins une fois, deux faces de suite ». Quelle est la probabilité de U ?

EXERCICE 7

On réalise une suite de lancers d'une piéce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité 1/2. On note P_k (resp. F_k) l'événement : « on obtient pile (resp. face) au $k^{éme}$ lancer ». Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la premiére fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. **a.** Calculer $P(X = 2)$

b. En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.

c. Sur le modéle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.

d. Déterminer $\mathrm{P}(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

e. Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.

2. On se propose, dans cette question, de retrouver les résultats précédents par une autre méthode.

a. Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \ldots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.

b. En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales que :

$$\forall k \geq 3 \qquad P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$$

c. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est arithmétique. Retrouver alors $P(X = k)$ pour $k \geq 2$.

3. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

EXERCICE 8

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul.

1. On définit $S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}$

a. Calculer S_1, S_2, S_3

b. Montrer que $\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}$

c. Montrer que $S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$.

2. Pour p entier naturel non nul, on pose $u_p = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, $u_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2}u_p$. En déduire, par récurrence, que, pour tout p entier naturel non nul :

$$u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$$

b. Détermier $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p$.

3. On étudie le cours en bourse d'une action. On suppose les variations journalières indépendantes les unes des autres. On convient de noter 0 le cours correspondant au début de l'observation, et on suppose que, chaque jour, le cours monte d'une unité (+1) avec une probabilité p $(0 < p < 1)$ ou descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1-p$. On note X_{2n} le cours constaté le $2n^{ième}$ jour suivant le début de l'observation. Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1-1-1+1 = -2$.

a. Quelles sont les valeurs prises par X_4 ? Plus généralement, quelles sont les valeurs prises par X_{2n} ?

b. On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté, et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé. Quelles sont les lois de probabilité de Y_{2n} et Z_{2n} ? Donner leurs espérances.

c. Quelles relations lient, d'une part n, Y_{2n} et Z_{2n}, et d'autre part X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n} ? En déduire une expression de X_{2n} en fonction de Y_{2n} et de n. Quelle est l'espérance de X_{2n} ? Que vaut-elle si $p = 1/2$? Est-ce surprenant ? Montrer que les valeurs de X_{2n} sont $\{2k, k \in [[-n,n]]\}$. (i.e. les valeurs paires de $-2n$ à $2n$). Montrer que :

$$\forall k \in [[-n,n]], \quad p(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$$

d. On suppose, dans cette question que $p = 1/2$ et on note p_n la probabilité que l'action ait monté ou soit resté stable à l'issue de $2n$ jours d'observation. Montrer que : $p_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}$. Que valent p_1, p_2, p_3 ? Que se passe-t-il quand n devient grand ?

EXERCICE 9

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement l'urne U_1 contient les boules 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules $3, 4, 5$ et 6. On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : $1, 3, 2, 3, 5$. Quel est le contenu de l'urne U_1 à l'issue du cinquième échange ?

2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance $E(X_1)$.

3. a. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.

b. Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).

4. a. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$on a :

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6}P(X_n = 1)$$

et pour tout entier k, $1 \leq k \leq 5$:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) = &\frac{7-k}{6}P(X_n = k-1) \\ &+\frac{k+1}{6}P(X_n = k+1) \end{aligned}$$

et enfin

$$P(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6}P(X_n = 5)$$

b. En déduire que pour tout entier n non nul :

$$E(X_{n+1}) = \frac{2}{3}E(X_n) + 1$$

c. Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n puis :

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n)$$

Comment interprétez-vous ce résultat ?

EXERCICE 10

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1-p$. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant).

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a. Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

b. Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbf{N}^*)^2$ de la façon suivante :
pour tout $(i, j) \in (\mathbf{N}^*)^2$,$(X = i \text{ et } Y = j)$ est l'événement : « les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ieme}}$est blanche **ou** les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)$-ème ». Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

b. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$$

c. Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout $(i, j) \in (\mathbf{N}^*)^2$:

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. a. En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

b. Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5. a. Établir que, si $p \neq \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (on pourra envisager $P(X = 1$ et $Y = 1)$).

b. Démontrer que, si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

EXERCICE 11

Partie 1.

On considère dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ les quatre matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Vérifier que $P^{-1}MP = D$ puis exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer les coefficients de la matrice D^n.

4. Pour tout entier naturel n, exprimer M^n en fonction de P , D^n et P^{-1}. En déduire les coefficients de M^n en fonction de n.

5. Montrer que D est inversible et calculer D^{-1}.

6. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1}en fonction de P, D^{-1} et P^{-1}.

Partie 2.

On effectue des tirages dans trois urnes :

– Une urne blanche contient une boule blanche et trois boules noires.
– Une urne noire contient trois boules noires et une boule verte.
– Une urne verte contient une boule noire et trois boules vertes.

Pour le premier tirage, on choisit une urne au hasard, on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient. Le second tirage a lieu dans l'urne ayant la même couleur que la première boule obtenue au premier tirage : on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient. On continue ainsi en suivant le même protocole : le $(n+1)$-ème tirage s'effectue dans l'urne ayant la même couleur que la boule obtenue au n-ème tirage, et une boule tirée est toujours remise dans l'urne dont elle provient. Pour tout n, entier naturel non nul, on désigne par :
B_n l'événement : « le n-ième tirage donne une boule blanche ».
N_n l'événement : « le n-ième tirage donne une boule noire ».
V_n l'événement : « le n-ième tirage donne une boule verte ».

1. Calculer $P(B_1)$, $P(N_1)$, et $P(V_1)$.

2. établir que $P(B_2) = \frac{1}{48}$ et $P(N_2) = \frac{7}{12}$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{4} P(B_n)$$

En déduire $P(B_n)$ en fonction de n.

4. Soit M la matrice définie à la partie 1. On pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} P(B_n) \\ P(N_n) \\ P(V_n) \end{pmatrix}$$

En utilisant le système complet d'événements B_n, N_n, V_n, établir que :

$$X_{n+1} = MX_n$$

pour tout entier naturel n non nul.

5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$X_n = M^{n-1} X_1$$

6. En déduire $P(N_n)$ et $P(V_n)$ en fonction de n et déterminer leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 12

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir « pile » et celle d'obtenir « face » étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier « pile ». Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbf{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées 1, 2, ..., k, puis on extrait au hasard une boule de cette urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On décide de coder l'événement « obtenir un « pile » » par 1 et l'événement « obtenir un « face » » par 0. On rappelle que la fonction `random` renvoie, pour un argument k de type `integer` (où k désigne un entier supérieur ou égal à 1) un entier aléatoire compris entre 0 et $k-1$. Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus :

```
program probleme ;
var z,hasard :integer ;
begin
   randomize ;
   z :=0 ;
   repeat
      z :=......... ;
      hasard :=......... ;
   until (hasard=1) ;
   writeln(z) ;
end.
```

2. Quelles instructions faut-il rajouter avant la dernière ligne de ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

3. Comparer $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ à $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbf{N}^*$). En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbf{N}^*$).

4. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

5. Pour tout couple (i,k) de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(Z=k)}(X=i)$.

6. En déduire que $\forall i \in \mathbf{N}^*$:

$$P(X=i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

7. On admet dans cette question que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=i}^{+\infty} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}$. Vérifier que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) = 1$$

8. Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a :

$$|iP(X=i)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

9. En déduire que X possède une espérance.

10. Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme précédemment, que $E(X) = \frac{3}{2}$.

11. Montrer que X a un moment d'ordre 2, c'est-à-dire que X^2 admet une espérance.

12. Établir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme précédemment, que :

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

13. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad (k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$$

14. En déduire la valeur de $E(X^2)$ et vérifier que $V(X) = \frac{11}{12}$.

15. On se propose de calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X \geq 3)$.

a. Écrire explicitement en fonction de x, réel différent de 1, et n, entier naturel non nul, la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$.

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

c. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

d. Etablir alors que $P(X=1) = \ln(2)$, puis donner la valeur de $P(X=2)$.

e. Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $P(X \geq 3)$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$.