

## Feuille 16 : séries

### EXERCICE 1

Calculer les sommes de séries suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{5^k}$$

$$C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{k+1}}$$

$$D = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$E = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{5^{k-1}}$$

$$F = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$G = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{3^n}$$

$$H = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}$$

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$$

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

$$K = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \quad (\text{utiliser } K \text{ et } L)$$

$$N = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)!}$$

$$O = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k2^k}{k!}$$

$$P = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

### EXERCICE 2

1. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$$

3. En déduire la nature de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ .

4. Donnez explicitement un entier  $n$  tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq 10$ .

### EXERCICE 3

On considère la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ . On note  $S_N$  sa  $N$ -ème somme partielle.

1. Vérifier que  $\forall N \in \mathbf{N}^*$ ,  $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$ .

2. En déduire que la série initiale converge et calculer sa somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

### EXERCICE 4

On considère la série numérique :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

et on note  $S_N$  sa  $N$ -ème somme partielle.

1. Vérifier que :

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

2. Montrer que :

$$S_N = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2N+1} \right)$$

3. Conclure.

### EXERCICE 5

On considère la série numérique :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

On note  $T_N$  sa  $N$ -ème somme partielle.

1. Vérifier que :

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

2. En déduire que :

$$\forall N \geq 2, \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leq T_N \leq 2 - \frac{1}{N}$$

3. Montrer que la suite  $(T_N)$  est majorée.

4. Déterminer la monotonie de la suite  $(T_N)_{N \geq 2}$ .

5. En déduire la convergence de la série initiale.

6. Établir l'encadrement suivant :

$$\frac{3}{2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

### EXERCICE 6

On considère la série numérique :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$$

On note  $S_N$  la  $N$ -ème somme partielle de cette série.

1. Déterminer la monotonie de la suite  $(S_N)_{N \geq 0}$ .

2. Justifier que :

$$\forall n \geq 0, \quad \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq e^{-n}$$

3. En déduire que :

$$\forall N \geq 0, \quad S_N \leq \frac{1 - e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}}$$

4. Montrer que la série initiale converge et que l'on a l'encadrement suivant pour sa somme :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{e}{e-1}$$

### EXERCICE 7

On considère la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On note  $T_N$  sa  $N$ -ème somme partielle.

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

2. En déduire que :

$$\forall N \geq 1, \quad 2(\sqrt{N+1} - 1) \leq T_N \leq 2\sqrt{N}$$

3. La série initiale est-elle convergente ?

### EXERCICE 8

On considère la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

On note  $S_N$  sa  $N$ -ème somme partielle de la série. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

2. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

3. Montrer que :

$$\forall N \geq 0, \quad S_N = I_0 - (-1)^{N+1} I_{N+1}$$

4. En déduire que la série initiale converge et que sa somme est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

### EXERCICE 9

Le but de cet exercice est de (re)montrer que la série harmonique  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$  diverge.

1. Soit  $k \in \mathbf{N}^*$ . Majorer  $\frac{1}{x}$  par une constante pour  $x \in [k, k+1]$ .

2. En déduire, par intégration, que  $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .

3. Montrer, par récurrence, que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$$

4. Démontrer que la série harmonique diverge

### EXERCICE 10

Étudier la nature de chaque série en commençant par trouver un équivalent simple de son terme général :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+3} \quad (1)$$

$$\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - k} \quad (2)$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{k}{(k+1)\sqrt{k+1}} \quad (3)$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(k+1)^3}{k^4 \sqrt{k}} \quad (4)$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{e^k + e^{-k}} \quad (5)$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+2^k} \quad (6)$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+2^{-k}} \quad (7)$$