Feuille 15 : intégration

EXERCICE 1
Pour chaque fonction, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide :

$f_1(x) = 2$	$f_2(x) = x$	$f_3(x) = 5x$
$f_4(x) = -4x^2$	$f_5(x) = x^2 - 3x + 2$	$f_6(x) = -2x^2$
$f_7(x) = 3x + 5$	$f_8(x) = \frac{1}{2}x^2$	$f_9(x) = 2x^5$
$f_{10}(x) = \frac{x-3}{2}$	$f_{11}(x) = 3x^2 + 2x + 1$	$f_{12}(x) = -x^2 + 1$
$f_{13}(x) = -\frac{1}{x}$	$f_{14}(x) = e^x$	$f_{15}(x) = x - \frac{1}{x^2}$
$f_{16}(x) = x^7$	$f_{17}(x) = \frac{1}{x^3}$	$f_{18}(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$
$f_{19}(x) = 5x^2 + x + \frac{2}{x}$	$f_{20}(x) = \frac{e^x+4}{3}$	$f_{21}(x) = 2(2x+1)^3$
$f_{22}(x) = (3x+1)^{-5}$	$f_{23}(x) = (-2x+1)^5$	$f_{24}(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
$f_{25}(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^2$	$f_{26}(x) = -3\sqrt{x}\,x^2$	$f_{27}(x) = \frac{2\sqrt{x}}{5x^3}$
$f_{28}(x) = \sqrt[3]{x^4}$	$f_{29}(x) = e^{2x}$	$f_{30}(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

EXERCICE 2
Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$$
$$J = \int_0^4 \sqrt{u}(u - 2\sqrt{u}) \mathrm{d}u$$
$$K = \int_1^4 (2z-1)e^{z^2-z} \mathrm{d}z$$

EXERCICE 3
Calculer les intégrales suivantes par intégrations par parties :

$$L = \int_1^e \ln(x) \mathrm{d}x$$
$$M = \int_1^e x\ln(x) \mathrm{d}x$$
$$N = \int_1^e x^2\ln(x) \mathrm{d}x$$
$$O = \int_1^e t^2(\ln t)^3 \mathrm{d}t$$
$$P = \int_2^5 \sqrt{3s}\ln s \mathrm{d}s$$
$$Q = \int_0^{-1} (2x^2+1)e^{5x} \mathrm{d}x$$

EXERCICE 4
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variables indiqué :

$$A = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} \qquad (u = 2x+1)$$
$$B = \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\mathrm{d}x}{1-4x} \qquad (u = 1-4x)$$
$$C = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2} \qquad (u = 2x+1)$$
$$D = \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\mathrm{d}x}{(1-4x)^2} \qquad (u = 1-4x)$$
$$E = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x \qquad (u = x^2+1)$$
$$F = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} \mathrm{d}x \qquad (u = e^x)$$

EXERCICE 5
Calculer les intégrales suivantes (décomposer les fractions rationnelles en éléments simples) :

$$G = \int_2^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$$
$$H = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+3)}$$
$$I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)}$$

EXERCICE 6
Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = x^2$ si $x \in [1,2]$. Calculer :

$$\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x$$

EXERCICE 7
Soit $a > 0$. Démontrer que :

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln x}{1+x^2} \mathrm{d}x = 0$$

à l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{t}$.

EXERCICE 8
Soit $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et impaire. Démontrer que :

$$\int_{-1}^1 f(x) \mathrm{d}x = 0$$

Indication : poser $t = -x$.

EXERCICE 9
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$I_n = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a x^n e^{-x} \mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2, I_3.
2. Énoncer une conjecture pour I_n et démontrez-la.

EXERCICE 10
Pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, on pose :

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n \mathrm{d}x$$

1. Calculer $I_{m,0}$;
2. Établir une relation entre $I_{m,n+1}$ et $I_{m+1,n}$;
3. En déduire une expression simple de $I_{m,n}$.

EXERCICE 11
Dériver les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \sqrt{t^2+1}\mathrm{d}t \\ g(x) &= \int_x^0 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ h(x) &= \int_0^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ i(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2}\mathrm{d}t \\ j(x) &= \int_{-x}^{e^x} \sqrt{1+e^{-t}}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

EXERCICE 12
Dans chaque cas, représenter graphiquement et calculer l'aire de la région indiquée :
– $\mathscr{R}$ est la région bornée délimitée par l'axe $(0x)$, la courbe d'équation $y = x^2$, et la droite d'équation $x = 3$.
– $\mathscr{S} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ -1 \leq x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq e^x\}$
– $\mathscr{T} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \leq x \leq 2 \text{ et } \frac{x}{2} \leq y \leq 2x+1\}$
– $\mathscr{U} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
– $\mathscr{V}$ est la région bornée délimitée par les droites d'équations $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ et $y = -2x+1$.

EXERCICE 13
Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, justifier que la fonction est C^1 sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.

$$\begin{aligned} a &: x \mapsto \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t \\ b &: x \mapsto \int_{-2}^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \\ c &: x \mapsto \int_{-3}^x \sqrt{t^4-1}\mathrm{d}t \\ d &: x \mapsto \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}\mathrm{d}t \\ e &: x \mapsto \int_{1/2}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t} \end{aligned}$$

EXERCICE 14
On pose :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln x}{x - \ln x} \quad \text{si } x > 0 \\ f(0) &= -1 \end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x - \ln x > 0$
2. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.
3. Montrer que f est continue sur D.
4. Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
5. Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.
6. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
7. Dresser le tableau de variations de f.
8. Étudier le signe de f.
9. Pour tout réel x élément de D, on pose :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D puis étudier ses variations.
10. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.
11. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}\,\mathrm{d}t = +\infty$.
12. En déduire la limite de F en $+\infty$.

EXERCICE 15
On considère les fonctions :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad G(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1. Calculer $\mathscr{D}_F$ et $\mathscr{D}_G$.
2. Montrer que F est C^1 sur $\mathscr{D}_F$ et calculer F'.
3. Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. Montrer que G est dérivable sur $\mathscr{D}_G$. Calculer G' et $G(1)$. En déduire G.

EXERCICE 16
On considère la fonction :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que $\forall t \geq 0, \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$.
3. Donner un encadrement de F et déterminer sa limite en $+\infty$.
4. Montrer que F est dérivable sur son domaine de définition et calculer F'.

EXERCICE 17

On considère la fonction numérique Φ définie par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4+t^4}}$$

1. Calculer $\mathscr{D}_\Phi$ et montrer que Φ est une fonction impaire.
2. Etablir, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$:

$$\frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leq \Phi(x) \leq \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}$$

   En déduire la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Justifier la dérivabilité de Φ sur $\mathbf{R}$ et calculer $\Phi'(x)$.

EXERCICE 18

On pose pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \mathrm{d}x$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_n \geq 0$ et étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$
2. Etablir, pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

3. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ puis, avec la question 2, donner un équivalent de I_n.

EXERCICE 19

On pose :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t \mathrm{d}t$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$$

3. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

4. En déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

EXERCICE 20

Pour tout entier naturel n, on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$$

1. Étudier les variations des suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$$

4. En déduire la limite de (J_n) et celle de nJ_n puis donner un équivalent J_n.

EXERCICE 21

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. Montrer que (J_n) converge vers 0.
3. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$$

   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
4. Donner un équivalent de I_n.

EXERCICE 22

Soit x un réel ≥ 0. On considère la suite :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+x+1}$$

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

2. En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t = S_n(x) + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

3. Démonter que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+2}$$

Puis que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$$

EXERCICE 23

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0 (indication : majorer $\frac{x^n}{1+x}$ convenablement).

2. Justifier que $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Calculer I_0 puis I_1.

3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^{\times}, \quad (-1)^n I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

4. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$