Feuille 14 : dérivation

EXERCICE 1
Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans donner de justification concernant l'existence de cette dérivée) :

$$\begin{aligned} a(x) &= \ln(1+x^2) \\ b(x) &= \frac{e^{2x}}{x^2-1} \\ c(x) &= \exp(x+1/x) \\ d(x) &= \sqrt{x^2+x+1} \\ e(x) &= \frac{-x+2}{x+1} \\ f(x) &= \frac{x^2+2x+2}{3-x} \end{aligned}$$

EXERCICE 2
Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - |x|$$

EXERCICE 3
Étudier la dérivabilité de la fonction suivante :

$$a : x \mapsto \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 4
Étudier la dérivabilité de la fonction suivante :

$$b : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 5
Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x-x^2}$.

EXERCICE 6
Soit :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Étudier la continuité (ainsi que les éventuels prolongements) et la dérivabilité de f.

EXERCICE 7
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Calculer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (indice : conjecturer une formule puis la prouver par récurrence).

EXERCICE 8
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{x}}{2^n x^n}$$

EXERCICE 9
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x|x|$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ mais qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

EXERCICE 10
Étudier la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$

EXERCICE 11
Combien de racines admet le polynôme $x^4 + x - 1$?

EXERCICE 12
Étudier la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+3x+2}$$

EXERCICE 13
Trouver tous les extremums locaux de la fraction rationnelle définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

EXERCICE 14
Trouver tous les extremums locaux du polynôme défini par :

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x + 1$$

EXERCICE 15
Étudier la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x^4+2x-3}{x^3-1}$$

Exercice 16
Étudier la fonction suivante :

$$f(x) = (x^2+3x-4)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 17
Étudier la fonction suivante :

$$f(x) = (x^2-x-2)^{-\frac{1}{2}}$$

Exercice 18
Étudier la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$$

Exercice 19
Étudier la fonction suivante :

$$f(x) = \exp(x+x^{-1})$$

Exercice 20
Étudier la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$

Exercice 21
Démontrer que :

$$\forall x \geq 1,\ \ln(x) \leq x-1$$

Exercice 22
Démontrer que :

$$\forall x > 0,\ \frac{2}{x}+\frac{x}{5} \geq 2\sqrt{10}$$

Exercice 23
Démontrer que :

$$\forall x \in]0, e^{-1}[,\ x\ln(x^{-1}) < e^{-1}$$

Exercice 24
Soit p un réel positif fixé. Démontrer que parmi les rectangles de périmètre p, c'est le carré de côté $p/4$ qui a une aire maximale (on considérera un rectangle de périmètre p et dont un côté est de longueur x, on exprimera son aire $a(x)$ puis on étudiera la fonction a).

Exercice 25
Chercher le ou les points de la parabole d'équation $y = x^2$ qui sont les plus proches du point $(6,3)$.

Exercice 26
Encadrer les nombres suivants à l'aide du théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{10001}-100 \\ B &= \frac{1}{0,99}-1 \\ C &= \ln(1,01) \end{aligned}$$

Exercice 27
1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1)-\ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

2. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$.

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 28
Soit f la fonction définie pour tout x réel par :

$$f(x) = \left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.
3. Déterminer la fonction dérivée f' de f et dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente dans un repère orthogonal d'unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.
5. Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes éventuelles dans ce même repère. On donne les valeurs suivantes : $f(-1) \approx 1,36$; $f(1) \approx 0,92$; $f(2) \approx 0,68$; $f(5) \approx 0,12$.

Exercice 29
Étudier la convexité des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^5-15x^4+10x^3+1 \\ g(x) &= \frac{x^2}{x+1} \\ h(x) &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{aligned}$$