Feuille 13 : suites convergentes

EXERCICE 1
Soit :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}$$
Montrer que (u_n) est croissante.

EXERCICE 2
Soit :
$$u_0 = -2, \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{3-u_n}$$
On pose $v_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
1. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis étudier la convergence de (u_n).

EXERCICE 3
Soit :
$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 2n - 1$$
On pose $v_n = u_n - n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
1. Montrer que (v_n) est arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis étudier la convergence de (u_n).

EXERCICE 4
Soit $f(x) = e^x - x$.
1. Étudier la fonction f et en particulier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ admet deux solutions de signes opposés. On notera u_n la solution positive.
3. Étudier les variation de (u_n).
4. Montrer que $\forall n \geq 2$, $u_n \geq \ln(n)$. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 5
Soit :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE 6
Soit :
$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$$
On pose $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.
1. Étudier f succinctement.
2. Démontrer que :
$$\forall x \neq 0, \quad f(x) - x = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$
3. En déduire la limite de $f(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$, puis montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$. Donner une équation de cette asymptote.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
5. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
6. Montrer que (u_n) est convergente.
7. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et en déduire la limite de (u_n).

EXERCICE 7
Montrer que les suites définies par $u_n = 1 + \frac{1}{n!}$ et $v_n = \frac{n}{n+1}$ sont adjacentes.

EXERCICE 8
Soit $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

EXERCICE 9
Soient $u_0 > v_0 > 0$, et :
$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$
1. Démontrer par récurrence que u_n et v_n existent et sont strictement positifs.
2. Montrer par récurrence que $u_n \geq v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante et que (v_n) est croissante.
4. Déduire des questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées, puis qu'elles sont convergentes.
5. Montrer que (u_n) et (v_n) ont la même limite.

EXERCICE 10
Pour chaque suite, donner un encadrement de façon à établir sa convergence :
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$
$$v_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2}$$
$$w_n = \frac{-n^2 + (-1)^n n}{n^2}$$

EXERCICE 11
Soit $f(x) = e^x + x$.
1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle à préciser.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation $f(x) = n$ a une unique solution u_n.
3. Étudier les variations de la suite (u_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\ln(n - \ln(n)) \leq u_n \leq \ln(n)$.

5. En déduire la limite de (u_n) puis celle de $\frac{u_n}{\ln(n)}$. Donner un équivalent simple de u_n.

EXERCICE 12
Soit $f(x) = x\ln(x)$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation $f(x) = n$ a une unique solution u_n dans $[1, +\infty[$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) et montrer que $u_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \geq \frac{n}{\ln(n)}$ et $u_n \leq \frac{n}{\ln(n)-\ln(\ln(n))}$.
4. Calculer alors la limite de $\frac{u_n \ln(n)}{n}$ puis donner un équivalent de u_n.

EXERCICE 13
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation $x^n + 1 = nx$ a une unique solution dans $[0, 1]$. On note x_n cette solution.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}$ et donner la limite de (x_n).
3. Calculer la limite de nx_n (indice : écrire $f_n(x_n) = 0$), puis donner un équivalent de x_n.

EXERCICE 14
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation $x^n + 1 = nx$ a une unique solution dans $[0, 1]$. On note x_n cette solution.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \leq x_n \frac{2}{n}$ et donner la limite de (x_n).
3. Calculer la limite de nx_n (indice : écrire $f_n(x_n) = 0$), puis donner un équivalent de x_n.

EXERCICE 15
Calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

EXERCICE 16
Calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3}$$

EXERCICE 17
Soit :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{(n+(-1)^n)^2}{n^2+1}$$
1. Calculer la limite de (u_n) par encadrement.
2. Calculer la limite de (u_n) en utilisant un équivalent du numérateur.

EXERCICE 18
Soit :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
1. Montrer que (h_n) est croissante. On note ℓ la limite, finie ou infinie, de (h_n) : justifier.
2. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = +\infty$.

EXERCICE 19
Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = x^n + x - 1$.
1. Étudier f_n sur $[0, 1]$. Montrer en particulier que f_n réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle à préciser.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in [0, 1]$.
3. Montrer que $\forall x \in [0, 1], f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. En déduire que (x_n) est croissante (indice : prendre $x = x_n$).
4. Soit $\ell \in [0, 1]$ la limite de (x_n) : justifier. On suppose que $\ell < 1$. En utilisant le fait que $f_n(x_n) = 0$, obtenir une contradiction. En déduire la valeur de ℓ.