Feuille 12 : limites

EXERCICE 1
Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to+\infty} x^2-x\\
B &= \lim_{x\to-\infty} x^{2009}-x^{2008}\\
C &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}\\
D &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}\\
E &= \lim_{x\to1_-} \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}\\
F &= \lim_{x\to1_+} \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}\\
G &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x-1}{2x+1}\\
H &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x-1}{2x+1}\\
I &= \lim_{x\to-\frac{1}{2}_-} \frac{2x^2-x-1}{2x+1}\\
J &= \lim_{x\to-\frac{1}{2}_+} \frac{2x^2-x-1}{2x+1}\\
K &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+1}{x-2}}{\frac{x+3}{x-4}-\frac{x-3}{x+4}}\\
L &= \lim_{x\to3} \frac{x^3-27}{x-3}\\
M &= \lim_{x\to-1_-} \frac{x+1}{x^3+4x^2+5x+2}\\
N &= \lim_{x\to-1_+} \frac{x+1}{x^3+4x^2+5x+2}\\
O &= \lim_{x\to1} \frac{x^n-1}{x-1} \quad (n\in\mathbf{N}^*)
\end{aligned}$$

EXERCICE 2
Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}\\
B &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt{x}-x^2+x}{2x^3-\sqrt{x}}\\
C &= \lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\\
D &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x\\
E &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\\
F &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\\
G &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\\
H &= \lim_{x\to2} \frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+7}-3}\\
I &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)\\
J &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)\\
K &= \lim_{h\to0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\\
L &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+1}-x
\end{aligned}$$

EXERCICE 3
Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\\
B &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}\\
C &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{x}\\
D &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+1}\\
E &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{x^3+x+1}\\
F &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{xe^{2x}-1}\\
G &= \lim_{x\to+\infty} e^x-x^4\\
H &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-x}{\sqrt{x}}\\
I &= \lim_{x\to+\infty} x^3-2\sqrt{x}+e^x\\
J &= \lim_{x\to+\infty} e^{2x}-x\\
K &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}+1}{x+1}\\
L &= \lim_{x\to-\infty} xe^x\\
M &= \lim_{x\to-\infty} e^x-x\\
N &= \lim_{x\to0_+} xe^{\frac{1}{x}}\\
O &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x(e^x-x)}
\end{aligned}$$

EXERCICE 4
On pose :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

– Déterminer le domaine de définition de f.
– Montrer que f peut-être prolongée par continuité en 0.

EXERCICE 5
On pose :

$$f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}$$

– Déterminer le domaine de définition de f.
– Montrer que f peut-être prolongée par continuité en 0.

EXERCICE 6
Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}\\
B &= \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x}\\
C &= \lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)\\
D &= \lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x))\\
E &= \lim_{x\to0} \frac{2^x-1}{x}\\
F &= \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1}\\
G &= \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{\ln(1+x)}\\
H &= \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}\\
I &= \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{\sqrt{1+x}-1}\\
J &= \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^4-1}\\
K &= \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x^2}
\end{aligned}$$

EXERCICE 7
Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to0_+} \frac{x}{7}\left\lfloor\frac{3}{x}\right\rfloor\\
B &= \lim_{x\to0_-} \frac{x}{7}\left\lfloor\frac{3}{x}\right\rfloor\\
C &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{7}\left\lfloor\frac{3}{x}\right\rfloor\\
D &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{7}\left\lfloor\frac{3}{x}\right\rfloor
\end{aligned}$$

Indice : utiliser des encadrements.

EXERCICE 8

Étudier la convergence des suites suivantes :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n}{n^2+1} \\
b_n &= \sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1} \\
c_n &= \frac{1}{n^2e^{-n}} \\
d_n &= n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
e_n &= n(e^{\frac{2}{n}+1}-e) \\
f_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
g_n &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\
h_n &= 3^n \\
i_n &= (-3)^n \\
j_n &= n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
k_n &= \frac{n^2+3n-4}{(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n}
\end{aligned}$$

EXERCICE 9

Donner un équivalent simple de chaque suite.

$$\begin{aligned}
a_n &= n^3+n^2+n+1 \\
b_n &= \sqrt{n}-n \\
c_n &= \frac{2n+1}{n^2-1} \\
d_n &= \frac{e^n-\sqrt{n}}{n^2e^n+n+1} \\
e_n &= e^{\frac{1}{n}}-1 \\
f_n &= (n^2-2n+2)(e^{\frac{1}{n^2}}-1) \\
g_n &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
h_n &= (n^3+n+1)(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)\ln(1+n^{-2}) \\
i_n &= \frac{n^2\ln(1+e^{-n})}{n+1} \\
j_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n \\
k_n &= \alpha^n+\beta^n \quad \text{avec } |\alpha|<|\beta|<1
\end{aligned}$$

EXERCICE 10

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to+\infty} e^{2x+1}-x^5 \\
B &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}-x}{\ln(x)} \\
C &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}-\ln(x) \\
D &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2} \\
E &= \lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{x}}{e^x-1} \\
F &= \lim_{x\to 0_+} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \\
G &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\ln(1+x)} \\
H &= \lim_{x\to+\infty} x^4e^{-\sqrt{x}} \\
I &= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
J &= \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(1+4x)}{x} \\
K &= \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(1+x\sqrt{x})}{x^2} \\
L &= \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{e^{x^2}-1} \\
M &= \lim_{x\to 0_+} 3x^2+(\ln x)^2-\frac{1}{\sqrt{x}} \\
N &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x^2\ln(x)}{\ln(x)^2+\ln(x^2)} \\
O &= \lim_{x\to 0_+} (1+x^2)^x \\
P &= \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^x \\
Q &= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}} \\
R &= \lim_{x\to-\infty} (2^x+3^x)^{1/x} \\
S &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+x+1}}{x^2+1} \\
T &= \lim_{x\to+\infty} (x+1)^{1/3}-x^{1/3} \\
U &= \lim_{x\to+\infty} \exp(x^2)-e^{3x}+x^2 \\
V &= \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)-2\ln(x)
\end{aligned}$$