

Feuille 11. Généralités sur les fonctions

EXERCICE 1

Effectuer à chaque fois la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B :

- $A(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2$ et $B(x) = x - 1$
- $A(x) = x^4 + x + 1$ et $B(x) = x + 2$
- $A(x) = x^3$ et $B(x) = x^2 + 3$
- $A(x) = x^4 - 1$ et $B(x) = x^2 + 1$
- $A(x) = x^5 + x^3 - x + 1$ et $B(x) = x + 2$
- $A(x) = x^5$ et $B(x) = x + 1$

EXERCICE 2

Soit $P \in \mathbf{R}[x]$ un polynôme et soit $a \in \mathbf{R}$. Soient $Q(x)$ et $R(x)$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$.

1. Quelle relation lie $P(x)$, $x - a$, $Q(x)$, $R(x)$? En déduire que $R(a) = P(a)$ puis que $\forall x \in \mathbf{R}, R(x) = P(a)$.
2. Démontrer que si $P(a) = 0$ alors le polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$.
3. Application : soit $P(x) = x^3 + 2x - 3$. Trouver une racine évidente a de l'équation $P(x) = 0$, en déduire une factorisation de $P(x)$, puis résoudre complètement l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE 3

Résoudre les équations polynomiales suivantes :

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - x + 2 &= 0 & (1) \\ x^4 + x^2 - 2 &= 0 & (2) \\ x^4 + 7x^3 + 11x^2 - 7x - 12 &= 0 & (3) \\ x^3 - 4x^2 + 9x - 10 &= 0 & (4) \\ x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1 &= 0 & (5) \end{aligned}$$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}, f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Trouver trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

EXERCICE 5

Soit :

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q et des réels a et b tels que :

$$g(x) = Q(x) + \frac{ax+b}{x^2-4}$$

(indice : effectuer une division euclidienne convenable)

2. Trouver deux réels u et v tels que :

$$g(x) = Q(x) + \frac{u}{x-2} + \frac{v}{x+2}$$

3. Dériver $g(x)$.

EXERCICE 6

Soit :

$$h(x) = \frac{x^5}{x^2+x-2}$$

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q et des réels a et b tels que :

$$h(x) = Q(x) + \frac{ax+b}{x^2+x-2}$$

2. Trouver deux réels u et v tels que :

$$h(x) = Q(x) + \frac{u}{x-1} + \frac{v}{x+2}$$

3. Dériver $h(x)$.

EXERCICE 7

Déterminer le domaine de définition de chaque fonction :

$$a(x) = \sqrt{1-2x} \quad b(x) = \sqrt{x^2+x-30} \quad c(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$$

$$d(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x}} \quad e(x) = \sqrt{x^3+x^2+3x+3} \quad f(x) = \ln(x^3+3x-14)$$

$$g(x) = \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} \quad h(x) = \sqrt{\ln(2x+1)} \quad i(x) = \ln(\sqrt{2x+1})$$

EXERCICE 8

Soit la fonction suivante :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |x+4| \text{ si } x \leq 0 \\ x & \longmapsto & -2x+1 \text{ si } 0 < x < 3 \\ x & \longmapsto & x^2-2x-3 \text{ si } 3 \leq x \end{cases}$$

1. Donner le tableau des variations de f et tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f .
2. Déterminer les antécédents de 0, de 12, de -1 , par la fonction f .

EXERCICE 9

Encadrer les fonctions suivantes par les meilleures constantes possibles, sur les domaines indiqués :

$$a(x) = 2x + 1 \text{ sur } [0, 1], \quad b(x) = -x + 5 \text{ sur } [-2, 1]$$

$$c(x) = x^2 \text{ sur } [-1, 2], \quad d(x) = \frac{-x}{3x+1} \text{ sur } [2, 4]$$

$$e(x) = \frac{1}{e^x+1} \text{ sur } [-2, 2], \quad f(x) = e^x + e^{-x} \text{ sur } [-1, 1]$$

$$g(x) = x^2 + x - 2 \text{ sur } [-10, 10], \quad h(x) = |x^2 - 1| \text{ sur } [-1, 2]$$

EXERCICE 10

Montrer que les fonctions suivantes sont des bijections entre des ensembles à préciser, et calculer les bijections réciproques :

$$f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$$

$$g : x \mapsto \frac{-2x+1}{3-x}$$

$$h : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

EXERCICE 11

Les courbes représentatives des fonctions suivantes possèdent une symétrie (axiale ou centrale). Trouver cette symétrie dans chaque cas :

$$f : x \mapsto x^2 - 1$$

$$g : x \mapsto x^3 + 1$$

$$h : x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

$$i : x \mapsto x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 21$$

$$j : x \mapsto \frac{1-3x}{x+2} \quad k : x \mapsto \frac{x}{x+3}$$