Variables aléatoires

EXERCICE 1
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et soit A un événement.
1. Démontrer que A et $\emptyset$ sont indépendants.
2. Démontrer que A et Ω sont indépendants.

EXERCICE 2
Soient A, B deux événements indépendants.
1. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. Démontrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

EXERCICE 3
Un dé pipé possède la fonction de probabilité P décrite par le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Soit A l'événement « on obtient 1 ou 2 » et soit B l'événement « on obtient 2 ou 3 ».
1. Étudier l'indépendance de A et B.
2. Même question si le dé n'était pas pipé.

EXERCICE 4
On lance deux fois un dé puis on considère les événements :
– $A_1 =$« le premier nombre obtenu est pair »
– $A_2 =$« le second nombre obtenu est impair »
– $A_3 =$« la somme des deux nombres obtenus est paire »
1. Montrer que ces événements sont *deux à deux* indépendants.
2. Montrer qu'ils ne sont pas indépendants.

EXERCICE 5
Une expérience aléatoire consiste à lancer deux fois un dé (supposé équilibré). On définit quatre variables aléatoires :
– X désigne le résultat du premier dé
– Y désigne le résultat du second.
– $S = X + Y$
– $D = X - Y$
1. Déterminer les lois de X, Y, S, D.
2. Calculer leurs espérances.
3. Calculer leurs variances et leurs écarts-types.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Cov}(X,S)$, $\mathrm{Cov}(S,D)$.
5. X et S sont-elle indépendantes ? S et D sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 6
On lance trois fois une pièce et on note X le nombre de « faces » obtenus.
1. Déterminer la loi de X.
2. Tracer le graphe de la fonction de répartition F_X de X.

EXERCICE 7
Une urne contient 3 boules noires et 3 boules blanches. On en tire successivement 3 boules, sans remise. Notons X le nombre de boules noires obtenues.
1. Déterminer la loi de X.
2. Tracer le graphe de la fonction de répartition F_X de X.

EXERCICE 8
On lance un dé équilibré mais dont les faces affichent 1, 4, 9, 16, 25, 36. On note X le résultat obtenu. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

EXERCICE 9
On dit qu'une variable aléatoire réelle est centrée (resp. réduite) lorsque son espérance est nulle (resp. sa variance est égale à 1).
1. Soit X une variable aléatoire réelle et posons $Y = X - E(X)$. Démontrer que Y est centrée.
2. Soient U et V deux variables aléatoires réelles centrées. Posons $S = U + V$. Démontrer que S est centrée.
3. Soit X une variable aléatoire de variance non nulle et posons $N = \frac{X}{\sigma(X)}$. Démontrer que N est réduite.
4. Soit X une variable aléatoire de variance non nulle et posons :
$$C = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$
Démontrer que C est centrée et réduite.

EXERCICE 10
On lance deux fois un dé et on définit deux variables aléatoires réelles : X désigne le résultat du premier lancer, Y le résultat du second. On appelle distance entre X et Y la variable aléatoire $D = |X - Y|$.
1. Déterminer la loi de D.
2. Quelle est la distance moyenne entre X et Y ?
3. Tracer le graphe de la fonction de répartition F_D.

EXERCICE 11
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On admettra que :
$$\binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n-1} + \cdots + \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n}{n}$$
Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire toutes les boules une à une sans remise. On note X le rang de sortie de la dernière boule noire.
1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$.

EXERCICE 12
Soit Y une variable aléatoire telle que $Y(\Omega) = \{3,4,5,6\}$. Déterminer la loi de Y sachant que $P(Y < 5) = 1/3$, $P(Y > 5) = 1/2$, $P(Y = 3) = P(Y = 4)$.

EXERCICE 13
Un dé est pipé : la probabilité d'obtenir k est proportionnelle à k pour $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$. On lance ce dé et on note X le résultat obtenu.

1. Déterminer la loi de X.
2. calculer $E(X)$.
3. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

EXERCICE 14

Un urne contient une boule rouge, deux boules noires, et trois boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. Soit X le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

EXERCICE 15

On dispose d'un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence. On sait que 50 de ces pièces sont équilibrées tandis que les 50 autres sont truquées. Pour une pièce truquée, la probabilité d'apparition de pile lors d'un jet de cette pièce vaut $3/4$. On suppose que, pour une pièce donnée, les différents lancers sont indépendants les uns des autres.

1. **a.** On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance. Le résultat de ce jet est pile.

   Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?

   b. On relance cette même pièce et on obtient à nouveau pile. Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?
2. On désire effectuer un tri des pièces pour tenter d'éliminer celles qui sont truquées. Pour celà on prend les pièces du lot une à une et on lance chaque pièce deux fois.
   - Si au cours des deux lancers on obtient au moins un pile, on décide d'éliminer la pièce.
   - Dans le cas contraire, on la conserve.

   a. Quelle est la probabilité d'éliminer une pièce quand elle est équilibrée ?

   b. Quelle est la probabilité de conserver une pièce quand elle est truquée ?

   c. On note X_1 le nombre de pièces truquées et X_2 le nombre de pièces équilibrées qui sont ainsi éliminées.

   Déterminer les lois de X_1 et de X_2 ainsi que leur espérance. Que dire de l'efficacité du tri ?

   Donner enfin le nombre moyen de pièces éliminées.

EXERCICE 16

Une urne contient 8 boules : 3 noires et 5 blanches.

On tire l'une après l'autre deux boules de l'urne sans les y remettre.

On note N_1 l'évènement « obtenir une boule noire au premier tirage », N_2 « obtenir une boule noire au deuxième tirage », et de la même façon B_1 et B_2 obtenir une boule blanche au premier et au deuxième tirage.

1. **a.** Quelles sont les probabilités de N_1 et de B_1 ?

   b. On a tiré une boule blanche au premier tirage. Quelle est la probabilité d'avoir *alors* une boule noire au deuxième tirage ?

   c. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche puis une boule noire ?

   d. Déterminer la probabilité de N_2. Ce résultat était-il prévisible ?

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des deux tirages.
2. **a.** Décomposer l'évènement $(X = 0)$ et en déduire sa probabilté.

   b. Déterminer de même la probablité de l'évènement $(X = 2)$ et de $(X = 1)$.

   c. Donner dans un tableau la loi de X et calculer le nombre moyen de boules blanches obtenues lors de ces deux tirages.

EXERCICE 17

Une urne contient p jetons numérotés de 1 à p ($p \geqslant 2$). On effectue N tirages successifs ($N \geqslant 1$). Chaque tirage consiste à prendre un jeton dans l'urne, noter son numéro, puis remettre le jeton dans l'urne. Pour tout entier i compris entre 1 et p, on définit les variables aléatoires F_i et X_i comme suit :

- F_i est le nombre de fois où le jeton numéroté i a été tiré
- X_i prend la valeur 0 si le jeton numéroté i n'a pas été tiré et prend la valeur 1 si le jeton numéroté i a été tiré au moins une fois.

1. **Étude des variables aléatoires F_i**

   a. Pour tout i compris entre 1 et p, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire F_i .

   b. On considère la variable aléatoire $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

   Que vaut F ? Calculer l'espérance et la variance de F.

   c. Est-ce que les variables aléatoires F_i sont deux à deux indépendantes ?
2. **Étude des variables aléatoires X_i**

   a. Pour tout i compris entre 1 et p, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i.

   b. Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et p.

   Déterminer la probabilité pour que $X_i = 0$ sachant que $X_j = 0$.

   Est-ce que les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes ?

   c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{p} X_i$.
3. **Application**

   Vous êtes responsable du service après-vente d'une chaîne de magasins. Ce service est présent sur quinze sites et, au total, il reçoit en moyenne cinquante appels par jour.

   a. En utilisant le début de l'exercice pour modéliser cette situation, donner une interprétation des variables aléatoires F_i, X_i et X.

   b. Calculer des valeurs approchées à 10^{-1} près de l'espérance de F_i, de l'espérance de X_i et de l'espérance de X.

   Commenter brièvement ces résultats .