

Devoir 9

*Calculatrices et documents ne sont pas autorisés.
Vos affirmations non évidentes doivent être justifiées
complètement mais brièvement.*

Exercice 1. On considère trois suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) définies sur \mathbb{N} par leur premier terme :

$$u_0 = 5, v_0 = 3, w_0 = 1$$

et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

On se propose d'exprimer les termes de ces trois suites en fonction de l'entier naturel n et ce, de deux manières distinctes.

1. Première méthode

- Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est géométrique de raison 5 et en déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de $u_n + v_n$ en fonction de n .
- Démontrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique et en déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n .
- Déduire des deux questions précédentes les expressions de u_n et de v_n en fonction de l'entier naturel n .
- Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. En remarquant que pour tout entier naturel k , $v_k = w_{k+1} - w_k$, exprimer la somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

en fonction de w_n ; en déduire l'expression de w_n en fonction de n et vérifier que cette formule reste valable pour le cas $n = 0$.

2. Deuxième méthode

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on note X_n , la matrice

colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

- Reconnaître le résultat du produit matriciel AX_n .

(b) Montrer alors par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) On pose $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

(d) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D et en déduire D^n pour tout entier naturel n

(e) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$, puis calculer A^n .

(f) Retrouver les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de l'entier naturel n .

Exercice 2. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer la matrice J telle que $A = I + J$, puis calculer J^2 et J^3 .
 (b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, J^n est égale à la matrice nulle.
- (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

- (b) En déduire alors, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression sous forme de tableau de la matrice A^n .
- (a) Développer le produit $(I + J)(I - J + J^2)$.
 (b) En déduire que A est inversible et préciser A^{-1} en fonction de I et J . Vérifier que l'égalité obtenue à la question 2.a. reste vraie si $n = -1$.

Exercice 3. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calculer M^2 et M^3 .
- Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $M^3 = aM^2 + bM$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe deux réels a_n et b_n tels que :

$$M^n = a_nM^2 + b_nM$$

On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a , b , a_n et b_n .

- En déduire M^6 et M^7 . On écrira tous les éléments de ces matrices.