Lycée Joachim du Bellay, ECE1, mathématiques
23 octobre 2008

Devoir 8
Pour le 7/11/2008

Exercice 1. On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \end{array}\right.$$

et cela *sans utiliser* les résultats du cours sur les suites à double récurrence linéaire. À cet effet on définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la puissance n-ème de A

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer BC et CB.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :
$$B^n = B \ , \qquad C^n = (-1)^{n-1}C$$
3. Vérifier que l'on a :
$$A^2 = 5A - 6I$$
où I est la matrice carrée unité d'ordre 2.
4. Etablir que la matrice A est-inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.
5. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$A^n = 3^n B - 2^n C$$
6. La relation précédente est-elle encore vraie pour $n = -1$. C'est-à-dire a-t-on :
$$A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C \ ?$$

7. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$$

Expression de u_n en fonction de n

1. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Donner ainsi l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2. Soient A et P les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}
2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour out entier naturel $n \geq 3$.
3. En déduire que :
$$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0$$
   où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.
4. Pour tout réel t, on défint la matrice $E(t)$ par :
$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
   où I désigne la matrice unité d'ordre 3.
   (a) Montrer que :
$$\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t+t')$$
   (b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de I, A, A^2, t.
   (c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de I, A, A^2, t et n.