

Devoir 7

Pour le 24/10/2008

Exercice 1.

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1 + u_n \end{pmatrix}$$

2. Calculer u_n en fonction de n puis expliciter A^n .

Exercice 2.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $B = A - 2I$.

1. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$A^n = 2^n I + n2^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} B^2$$