Lycée Joachim du Bellay, ECE1, mathématiques
27 septembre 2008

Devoir 4

Calculatrices et documents ne sont pas autorisés.
Vos affirmations non évidentes doivent être justifiées complètement mais brièvement.

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante, où m est un paramètre :

$$x^2 - (m+1)x + \frac{1}{4} = 0$$

Exercice 2. On considère l'inéquation :

$$\frac{-x^3 - 2x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geq -1 \qquad (I)$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

2. Résoudre l'inéqaution (I).

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 6u_n + 2\cdot 7^n \end{cases}$$

1. On pose $v_n = u_n - 2\cdot 7^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison 6.
2. Calculer v_n en fonction de n.
3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 2\cdot 7^n \left(1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n\right)$$

4. *(non notée)* En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Soit (a_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = & -1 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{a_n}{3-2a_n} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n < 0$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $t_n = \dfrac{1}{a_n}$. Pourquoi est-ce possible ?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $t_{n+1} = 3t_n - 2$.
4. Calculer t_n en fonction de n. En déduire a_n en fonction de n.

Exercice 5. Soit (w_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 & = & -\dfrac{1}{2} \\ w_{n+1} & = & \dfrac{5w_n - 1}{w_n + 3} \end{cases}$$

1. Montrer que $w_{n+1} = 1 \iff w_n = 1$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n \neq 1$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $h_n = \dfrac{w_n + 1}{1 - w_n}$. Justifier.
4. Exprimer w_n en fonction de h_n.
5. Démontrer que la suite (h_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$.
6. Calculer h_n en fonction de n, puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n = \frac{3n+4}{3n-8}$$

7. Écrire un programme en Pascal, intitulé *ds4*, qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n puis affiche la valeur de w_n (on utilisera la formule obtenue à la question précédente).
8. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ w_{n+1} - w_n = \frac{-36}{(3n-5)(3n-8)}$$

9. En déduire que la suite (w_n) est décroissante pour $n \geq 3$.
10. *(non notée)* Quelle est la limite de w_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 6 (*à traiter en dernier*).

1. Trouver deux nombres x et y dont la somme vaut 2 et le produit -1.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 3n + 1$. Exprimer u_n en fonction de n (conjecturer une formule puis la démontrer par récurrence).

Fin