Lycée Joachim du Bellay, ECE1, mathématiques
26 septembre 2008

Devoir 3
Pour le 03/10/2008

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

1. Étudier les variations de la suite (s_n).
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

4. Retrouver alors le résultat de la question 2 sans raisonner par récurrence.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

2. En déduire le calcul de t_n.