

Devoir 11

Pour le vendredi 28 novembre

Exercice 1. Le but de cet exercice est de calculer, en fonction de l'entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n k2^{k-1}$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $I - A$ soit inversible. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$I + A + A^2 + \cdots + A^n = (I - A)^{-1}(I - A^{n+1})$$

2. À partir de maintenant, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$.
3. Calculer $I + A + A^2 + \cdots + A^n$.
4. En déduire la formule recherchée.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Toto possède n paires de chaussures. Il a donc $2n$ chaussures. Nous noterons c_1, c_2, \dots, c_n les chaussures gauches et c'_1, c'_2, \dots, c'_n les chaussures droites correspondantes. Toto choisit simultanément deux chaussures au hasard parmi toutes ses chaussures, gauches ou droites.

1. De combien de façons peut se faire ce choix ?
2. Parmi ces façons, combien correspondent à deux chaussures gauches ? Combien correspondent à deux chaussures droites ? Combien correspondent au choix d'une chaussure gauche et d'une chaussure droite ?
3. Calculer la probabilité pour que Toto obtienne une chaussure gauche et une chaussure droite.
4. Démontrer que Toto a strictement plus d'une chance sur deux d'obtenir une chaussure gauche et une chaussure droite.
5. Quelle est la probabilité pour que Toto obtienne deux chaussures d'une même paire ?