

Devoir 10

Pour le vendredi 21 novembre

Exercice 1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose :

$$f(x) = (1 + x)^n$$

1. Développer $(1 + x)^n$.
2. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$A = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$B = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \cdots + 2^n \binom{n}{n}$$

$$C = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de deux façons.
4. En déduire la somme :

$$D = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

Exercice 2.

Toto va acheter trois livres de math et deux bandes dessinées. Dans le magasin, il y a dix livres de math et vingt bandes dessinées.

1. De combien de façons Toto peut-il faire ses achats?
2. De retour chez lui, Toto forme une pile avec ses nouveaux livres. De combien de façons peut-il le faire?
3. Même question si Toto souhaite que ses livres de math se trouvent en bas de la pile, et ses bandes dessinées en haut.
4. Même question si Toto souhaite que ses livres de math se suivent dans la pile (mais pas nécessairement les bandes dessinées).

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$ (on cherchera à écrire A sous la forme $A = I + J$ pour une certaine matrice J et on utilisera la formule du binôme).