Corrigé du devoir 9

Pierre Bernard

25 novembre 2008

Exercice 2

1. (a)

$$A = I + J \Leftrightarrow J = A - I \Leftrightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{(la matrice nulle)}$$

(b) Soit n un entier tel que $n \geq 3$. On peut écrire :

$$J^n = J^3 J^{n-3}$$

Mais d'après la question précédente, $J^3 = 0$. Donc :

$$J^n = 0J^{n-3} = 0$$

2. (a) **Initialisation.** Pour $n = 2$:
– $A^n = A^2 = (I+J)^2 = (I+J)(I+J) = I + J + J + J^2 = I + 2J + J^2$.
– $I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 = I + 2J + \frac{2(2-1)}{2}J^2 = I + 2J + J^2$.
On constate donc que la propriété est vraie au rang 2.
Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$. On a :

$$A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

Multiplions les deux membres par A à gauche, en sachant que $A = I + J$:

$$A^{n+1} = (I+J)(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

$$A^{n+1} = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 + J + nJ^2 + \frac{n(n-1)}{2}J^3$$

Or on a vu que $J^3 = 0$ (question 1). Donc :

$$A^{n+1} = I + (n+1)J + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right)J^2$$

$$A^{n+1} = I + (n+1)J + \left(\frac{n(n-1)+2n}{2}\right)J^2$$

$$A^{n+1} = I + (n+1)J + \left(\frac{n^2+n}{2}\right)J^2$$

$$A^{n+1} = I + (n+1)J + \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)J^2$$

On reconnait ici la propriété au rang $n+1$, comme annoncé.
Conclusion. Par récurrence :

$$\forall n \geq 2, \quad A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

(b) La formule ci-dessus permet d'écrire :

$$\forall n \geq 2, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n - \frac{n(n-1)}{2} & 1-2n & -n \\ -n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 & 4n & 1+2n \end{pmatrix}$$

Après simplifications :

$$\forall n \geq 2, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(3-n)}{2} & 1-2n & -n \\ n(n-2) & 4n & 1+2n \end{pmatrix}$$

3. (a)

$$(I+J)(I-J+J^2) = I - J + J^2 + J - J^2 + J^3 = I + J^3$$

Or on sait que $J^3 = 0$ (question 1). Donc :

$$(I+J)(I-J+J^2) = I - J + J^2 + J - J^2 + J^3 = I$$

(b) D'après la question précédente, et puisque $A = I + J$:

$$A(I - J + J^2) = I$$

On en déduit[1] que A est inversible et :

$$A^{-1} = I - J + J^2 \qquad (\star)$$

La formule obtenue à la question 2.a. donne, pour $n = -1$:

$$A^{-1} = I - J + \frac{(-1)(-1-1)}{2} J^2 = I - J + J^2$$

On constate que cette égalité est vraie, puisque c'est l'égalité $(\star)$.

[1]Rappelons le résultat utilisé ici : si A et B sont deux matrices carrées de même dimension telles que $AB = I$, alors A et inversible et $A^{-1} = B$.