Corrigé du devoir 4

Pierre Bernard

10 octobre 2008

Exercice 1

L'équation de de degré 2, calculons son discriminant :

$$\Delta = (-(m+1))^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4} = (m+1)^2 - 1 = m^2 + 2m = m(m+2)$$

Pour étudier le signe de Δ, faisons un tableau de signes :

m	$-\infty$	-	-2	-	0	+	$+\infty$
$m+2$		-	0	+		+	
Δ		+	0	-	0	+	

Cas 1. $\Delta > 0$ c.a.d. $m \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

L'équation admet deux solutions qui sont :

$$x_1 = \frac{-(-(m+1)) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{m+1-\sqrt{m(m+2)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-(m+1)) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{m+1+\sqrt{m(m+2)}}{2}$$

Cas 2. $\Delta = 0$ c.a.d. $m = -2$ ou $m = 0$

L'équation admet une solution qui est :

$$x_0 = \frac{-(-(m+1))}{2} = \frac{m+1}{2}$$

Cas 3. $\Delta < 0$ c.a.d. $m \in]-2, 0[$

L'équation n'admet pas de solution.

Exercice 2

1. On cherche a, b, c :

$$\begin{aligned}
x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c) &\iff x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\
&\iff x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& a \\ 2 &=& a+b \\ -5 &=& b+c \\ -6 &=& c \end{array}\right. \quad \text{(par identification)} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& a \\ 2 &=& 1+b \\ -5 &=& b-6 \\ -6 &=& c \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& a \\ 1 &=& b \\ 1 &=& b \\ -6 &=& c \end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où : $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6)$.

2. L'inéquation I a un sens si et seulement si $x^3+2x^2-5x-6\neq 0$. Résolvons :

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-5x-6=0 &\iff (x+1)(x^2+x-6)=0\\ &\iff (x+1)=0 \quad \text{ou} \quad x^2+x-6=0\\ &\iff x=-1 \quad \text{ou} \quad x=2 \quad \text{ou} \quad x=-3 \quad \text{(racines évidentes)} \end{aligned}$$

Donc I a un sens si et seulement si $x\neq -1$ et $x\neq 2$ et $x\neq -3$.
Résolvons I :

$$\begin{aligned} \frac{-x^3-2x^2-5}{x^3+2x^2-5x-6}\geq -1 &\iff \frac{-x^3-2x^2-5}{x^3+2x^2-5x-6}+\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3+2x^2-5x-6}\geq 0\\ &\iff \frac{-5-5x-6}{x^3+2x^2-5x-6}\geq 0\\ &\iff \frac{-5x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\geq 0\\ &\iff \frac{5x+11}{(x+1)(x^2+x-6)}\leq 0 \end{aligned}$$

Étudions le signe de $5x+11$:

$$\begin{aligned} 5x+11<0 &\iff 5x<-11\\ &\iff x<\frac{-11}{5} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $x+1$:

$$x+1<0 \iff x<-1$$

Étudions le signe de x^2+x-6 : les racines de ce trinôme sont 2 et -3. On sait donc que $x^2+x-6<0$ si et seulement si $x\in]-3,2[$.
On déduit de ce qui précède le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{-11}{5}$		-1		2		$+\infty$
$5x+11$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{5x+11}{(x+1)(x^2+x-6)}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	

D'où l'ensemble des solutions de I :

$$\mathcal{S}=\left]-3,\frac{-11}{5}\right[\cup\,]-1,2[$$

Exercice 3

1. Remarquons que $u_n=v_n+2\cdot 7^n$. Calculons v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-2\cdot 7^{n+1}\\ &= 6u_n+2\cdot 7^n-2\cdot 7^{n+1}\\ &= 6(v_n+2\cdot 7^n)+2\cdot 7^n-2\cdot 7\cdot 7^n\\ &= 6v_n+12\cdot 7^n+2\cdot 7^n-14\cdot 7^n\\ &= 6v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 6.

2. $\forall n\in\mathbf{N},\ v_n=v_0 6^n$. Or $v_0=u_0-2\cdot 7^0=-2$ donc $\forall n\in\mathbf{N},\ v_n=-2\cdot 6^n$.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 2 \cdot 7^n \\ &= -2 \cdot 6^n + 2 \cdot 7^n \\ &= 2 \cdot 7^n - 2 \cdot 6^n \\ &= 2 \cdot 7^n \left(1 - \frac{2 \cdot 6^n}{2 \cdot 7^n}\right) \\ &= 2 \cdot 7^n \left(1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n\right) \end{aligned}$$

4. Puisque $7 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 7^n = +\infty$. Et puisque $-1 < \frac{6}{7} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$. On en conclut :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2 \cdot (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

Exercice 4

1. initialisation $a_0 = -1$ et $-1 < 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   hérédité Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a donc $a_n < 0$. Donc $-2a_n > 0$, $3 - 2a_n > 3 > 0$, et finalement $\frac{a_n}{3 - 2a_n} < 0$, $a_{n+1} < 0$, la propriété est héréditaire.
   Par récurrence, $a_n < 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. C'est possible car on a montré que $a_n < 0$ donc $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Calculons t_{n+1} :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{a_n}{3 - 2a_n}\right)} \\ &= \frac{3 - 2a_n}{a_n} \\ &= \frac{3}{a_n} - 2 \\ &= 3t_n - 2 \end{aligned}$$

4. On voit que (t_n) est une suite arithmético-géométrique. Résolvons : $\ell = 3\ell - 2 \iff -2\ell = -2 \iff \ell = 1$. Posons $v_n = t_n - \ell = t_n - 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (et remarquons que $t_n = v_n + 1$). On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= t_{n+1} - 1 \\ &= 3t_n - 2 - 1 \\ &= 3(v_n + 1) - 3 \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

   Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et donc $v_n = v_0 3^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or $v_0 = t_0 - 1 = \frac{1}{a_0} - 1 = \frac{1}{-1} - 1 = -2$. D'où $v_n = -2 \cdot 3^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad t_n = v_n + 1 = -2 \cdot 3^n + 1$$

   Pour calculer a_n, on utilise le fait que $t_n = \frac{1}{a_n} \iff a_n = \frac{1}{t_n}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{t_n} \\ &= \frac{1}{-2 \cdot 3^n + 1} \end{aligned}$$

Exercice 5

1.

$$\begin{aligned} w_{n+1} = 1 \quad & \iff \quad \frac{5w_n - 1}{w_n + 3} = 1 \\ & \iff \quad 5w_n - 1 = w_n + 3 \\ & \iff \quad 4w_n = 4 \\ & \iff \quad w_n = 1 \end{aligned}$$

2. Initialisation : $w_0 = -\frac{1}{2} \neq 1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n. On a donc $w_n \neq 1$. D'après la question précédente, on a alors $w_{n+1} \neq 1$. Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$. Ainsi la propriété est héréditaire.
Conclusion : par récurrence, $\forall n \in \mathbf{N},\ w_n \neq 1$.
3. On peut diviser par $1 - w_n$ car on vient de montrer que $w_n \neq 1$.

4.

$$\begin{aligned} h_n = \frac{w_n + 1}{1 - w_n} \quad & \iff \quad h_n(1 - w_n) = w_n + 1 \\ & \iff \quad h_n - h_n w_n = w_n + 1 \\ & \iff \quad -h_n w_n - w_n = 1 - h_n \\ & \iff \quad h_n w_n + w_n = h_n - 1 \quad \text{(multiplication par } -1) \\ & \iff \quad w_n(h_n + 1) = h_n - 1 \\ & \iff \quad w_n = \frac{h_n - 1}{h_n + 1} \end{aligned}$$

5. Calculons h_{n+1} :

$$\begin{aligned} h_{n+1} & = \frac{w_{n+1} + 1}{1 - w_{n+1}} \\ & = \frac{\frac{5w_n - 1}{w_n + 3} + 1}{1 - \frac{5w_n - 1}{w_n + 3}} \\ & = \frac{5w_n - 1 + w_n + 3}{w_n + 3 - 5w_n + 1} \\ & = \frac{6w_n + 2}{4 - 4w_n} \\ & = \frac{3w_n + 1}{2 - 2w_n} \\ & = \frac{3\frac{h_n - 1}{h_n + 1} + 1}{2 - 2\frac{h_n - 1}{h_n + 1}} \\ & = \frac{3(h_n - 1) + h_n + 1}{2(h_n + 1) - 2(h_n - 1)} \\ & = \frac{4h_n - 2}{4} \\ & = h_n - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc la suite (h_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$ (et pas $\dfrac{1}{2}$ comme dans l'énoncé).

6. D'après le cours sur les suites arithémtiques, $\forall n \in \mathbf{N},\ h_n = h_0 - \dfrac{n}{2}$. Or $h_0 = \frac{w_0+1}{1-w_0} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{1-(-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$. D'où :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ h_n = \frac{1}{3} - \frac{n}{2}$$

On en déduit w_n en utilisant la question 4 :

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{h_n-1}{h_n+1}\\
&= \frac{\frac{1}{3}-\frac{n}{2}-1}{\frac{1}{3}-\frac{n}{2}+1}\\
&= \frac{2-3n-6}{2-3n+6}\\
&= \frac{-3n-4}{-3n+8}\\
&= \frac{3n+4}{3n-8}
\end{aligned}$$

7.
```
program ds4;
   var n:integer;
begin
   writeln('Entrez un entier n');
   readln(n);
   writeln('w(n)=',(3*n+4)/(3*n-8));
   readln;
end.
```

8.

$$\begin{aligned}
w_{n+1}-w_n &= \frac{3(n+1)+4}{3(n+1)-8}-\frac{3n+4}{3n-8}\\
&= \frac{3n+7}{3n-5}-\frac{3n+4}{3n-8}\\
&= \frac{(3n+7)(3n-8)-(3n+4)(3n-5)}{(3n-5)(3n-8)}\\
&= \frac{9n^2-24n+21n-56-(9n^2-15n+12n-20)}{(3n-5)(3n-8)}\\
&= \frac{36}{(3n-5)(3n-8)}
\end{aligned}$$

On a $3n-5>0 \Leftrightarrow 3n>5 \Leftrightarrow n>\frac{5}{3}\simeq 1,66$.
Et $3n-8>0 \Leftrightarrow 3n>8 \Leftrightarrow n>\frac{8}{3}\simeq 2,66$.
Donc, lorsque $n\geq 3$, $3n-5>0$ et $3n-8>0$, donc $w_{n+1}-w_n>0$. La suite (w_n) est donc croissante pour $n\geq 3$.

9.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} w_n &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{3n-8}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{3n}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercice 6