Corrigé du devoir 3

Pierre Bernard

8 octobre 2008

Exercice 1

1. On a :

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Comme $n \in \mathbf{N}^*$, $n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ d'où $s_{n+1} - s_n > 0$. La suite (s_n) est strictement croissante.

2. Initialisation : $s_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc on a bien $s_1 = 1 - \frac{1}{1+1}$, la propriété est vraie au rang $n = 1$.
Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n et démontrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a donc :

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ajoutons aux deux membres $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$:

$$s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Or $s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = s_{n+1}$ donc :

$$s_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$s_{n+1} = 1 - \frac{(n+2)-1}{(n+1)(n+2)}$$
$$s_{n+1} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)}$$
$$s_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. Ainsi la propriété est héréditaire.
Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

3.
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} \iff 1 = a(k+1) + bk \iff 1 = (a+b)k + a$$

Par identification, on a donc $a + b = 0$ et $a = 1$, d'où $b = -1$. En conclusion :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

4. En utilisant la question précédente :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

On fait un changement d'indice dans la seconde somme en posant $j = k+1$:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \\ s_n &= \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} + \frac{1}{n+1} \right) \\ s_n &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Exercice 2