Corrigé du devoir 2

Pierre Bernard

24 septembre 2008

Exercice 1

L'inéquation n'a de sens que si $x \in \mathbf{R} \setminus \{-5, -4, 4\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} < \frac{1}{x+5} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+5} < 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{(x-4)(x+5) + (x+4)(x+5) - (x+4)(x-4)}{(x+4)(x-4)(x+5)} < 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + 5x - 4x - 20 + x^2 + 5x + 4x + 20 - (x^2 - 16)}{(x+4)(x-4)(x+5)} < 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2 + 10x - x^2 + 16}{(x+4)(x-4)(x+5)} < 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 + 10x + 16}{(x+4)(x-4)(x+5)} < 0
\end{aligned}$$

Étudions le signe du trinôme $x^2+10x+16$: ses racines sont -2 et -8. Donc $x^2+10x+16 < 0$ si et seulement si $x \in]-8, -2[$.

x	$-\infty$		-8		-5		-4		-2		4		$+\infty$
$x^2+10x+16$		+	0	-		-		-	0	+		+	
$x+4$		-		-		-	0	+		+		+	
$x-4$		-		-		-		-		-	0	+	
$x+5$		-		-	0	+		+		+		+	
$\dfrac{x^2+10x+16}{(x+4)(x-4)(x+5)}$		-	0	+	||	-	||	+	0	-	||	+	

On en conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty, -8[\cup]-5, -4[\cup]-2, 4[$.

Exercice 2

L'inéquation n'a de sens que lorsque $m \neq 0$. Distinguons deux cas :

Cas 1 : $m < 0$

$$\begin{aligned}
\frac{3x-2}{m} - m < x \quad & \Leftrightarrow \quad 3x - 2 - m^2 > mx \quad \text{car } m < 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 3x - mx > m^2 + 2 \\
& \Leftrightarrow \quad (3-m)x > m^2 + 2
\end{aligned}$$

Résolvons : $3 - m > 0 \Longleftrightarrow 3 > m$. Puisque $m < 0$, on a $m < 3$ et donc $3 - m > 0$. D'où :

$$(3-x)x > m^2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{m^2+2}{3-m}$$

Cas 2 : $m > 0$

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{m} - m < x &\Leftrightarrow\quad 3x - 2 - m^2 < mx \quad \text{car } m < 0 \\ &\Leftrightarrow\quad 3x - mx < m^2 + 2 \\ &\Leftrightarrow\quad (3-m)x < m^2 + 2 \end{aligned}$$

On a déjà vu que $3 - m > 0 \Longleftrightarrow 3 > m$. On distingue donc trois sous-cas :

Cas 2.1 : $m < 3$

$$(3-m)x < m^2 + 2 \quad\Leftrightarrow\quad x < \frac{m^2+2}{3-m}$$

Cas 2.2 : $m = 3$

$$(3-m)x < m^2 + 2 \quad\Leftrightarrow\quad 0 < 11$$

Cas 2.3 : $m > 3$

$$(3-m)x < m^2 + 2 \quad\Leftrightarrow\quad x > \frac{m^2+2}{3-m}$$

Conclusion

- Si $m \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$ alors $\mathcal{S} = \left]\frac{m^2+2}{3-m}, +\infty\right[$.
- Si $m \in]0, 3[$ alors $\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{m^2+2}{3-m}\right[$
- Si $m = 3$ alors $\mathcal{S} = \mathbf{R}$.

Rappelons que pour $m = 0$, l'inéquation n'a pas de sens.

Exercice 3

1. $\alpha = 1$ est une racine du polynôme $x^3 - 2x^2 + 1$
2.

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 1 = (x-\alpha)(ax^2 + bx + c) &\Leftrightarrow\quad x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &\Leftrightarrow\quad x^3 - 2x^2 + 1 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &\Leftrightarrow\quad x^3 - 2x^2 + 1 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

Par *identification des coefficients*, on est conduit à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & = & a \\ -2 & = & b-a \\ 0 & = & c-b \\ 1 & = & -c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 1 & = & a \\ -1 & = & b \\ -1 & = & c \end{array}\right.$$

D'où $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$.

3.

$$x^3 - 2x^2 + 1 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)(x^2 - x - 1) > 0$$

Étudions le signe de $x^2 - x - 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(1) = 5 > 0$ donc il admet deux racines $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De plus, $x^2 - x - 1 < 0$ si et seulement si $x \in]x_1, x_2[$.
Comparons x_1, x_2 et 1 : on a $x_1 < 1 < x_2$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$x^2 - x - 1$		$+$	0	-		-	0	$+$	
$x - 1$		-		-	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x^2 - x - 1)$		-	0	$+$	0	-	0	$+$	

D'où l'ensemble des solutions de I :

$$\mathcal{S} =]x_1, 1[\cup]x_2, +\infty[$$