Corrigé du devoir 11

Pierre Bernard

7 décembre 2008

Exercice 1

1. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} I + A + \cdots + A^n = (I-A)^{-1}(I - A^{n+1}) &\Leftrightarrow (I-A)(I + A + \cdots + A^n) = I - A^{n-1} \\ &\Leftrightarrow I + A + \cdots + A^n - A - \cdots - A^{n+1} = I - A^{n+1} \\ &\Leftrightarrow I - A^{n+1} = I - A^{n+1} \quad \text{ce qui est vrai} \end{aligned}$$

2. Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $A = 2I + J$. Les matrices $2I$ et J commutent ($2IJ = J2I$) donc on peut utiliser la formule du binôme :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ A^k = (J + 2I)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J^i (2I)^{k-i} = \binom{k}{0} J^0 (2I)^k + \binom{k}{1} J^1 (2I)^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k} J^k (2I)^0$$

Or un calcul simple montre que $J^2 = 0$. On a donc $\forall i \geq 2,\ J^i = 0$, et la formule ci-dessus se simplifie :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ A^k = \binom{k}{0} J^0 (2I)^k + \binom{k}{1} J^1 (2I)^{k-1} = (2I)^k + kJ(2I)^{k-1}$$

De plus :

$$\forall i \in \mathbf{N},\ (2I)^i = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} 2^i & 0 \\ 0 & 2^i \end{pmatrix} = 2^i I$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ A^k = 2^k I + k2^{k-1} J = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

3. Utilisons la question 1 : commençons par étudier l'inversibilité de $I - A$.

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Donc $I - A$ est inversible et $(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc, d'après les questions 1 et 3 :

$$I + A + A^2 + \cdots + A^n = (I-A)^{-1}(I - A^{n+1}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(I - \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2^{n+1} & -(n+1)2^n \\ 0 & 1 - 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & (n+1)2^n + 1 - 2^{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

Mais on peut calculer $I + A + A^2 + \cdots + A^n$ d'une autre manière, en utilisant uniquement la question 3 :

$$I + A + A^2 + \cdots + A^n = \sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} 2^k & \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} 2^k \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n+1)2^n + 1 - 2^{n+1}$$

Exercice 2

1. Toto choisit 2 objets parmi $2n$, il a $\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ façons de faire ce choix.
2. Choisir 2 chaussures gauches, c'est choisir parmi les n chaussures gauches : Toto a donc $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ façons de faire un tel choix. De même, il a $\frac{n(n-1)}{2}$ façons de choisir deux chaussures droites. Enfin, pour choisir une chaussure gauche et une chaussure droite, Toto a n^2 façons de faire (n choix possibles pour la chaussure gauche puis n choix possibles pour la chaussure droite).
3. Par équiprobabilité et d'après la question précédente, la probabilité pour que Toto obtienne une chaussure gauche et une chaussure droite est :
$$\frac{n^2}{n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}$$
4. On raisonne par équivalence :
$$\begin{aligned}
\frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2n}{2n-1} > 1 \quad \text{car } 2 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2n > 2n-1 \quad \text{car } 2n-1 > 0 \text{ (car } n \geq 1 \text{ par hypothèse)} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 > -1 \quad \text{ce qui est vrai}
\end{aligned}$$

   Toto a donc bien strictement plus d'une chance sur deux d'obtenir une chaussure gauche et une chaussure droite.
5. Il y a exactement n paires de chaussures donc la probabilité pour que Toto obtienne une paire est $\frac{n}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$.