

Corrigé du devoir 10

Pierre BERNARD

30 novembre 2008

Exercice 1

1. D'après la formule du binôme :

$$f(x) = (x+1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p 1^{n-p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

2. On remarque, grâce à la question précédente, que :

$$A = f(1) = (1+1)^n = 2^n$$

$$B = f(2) = (1+2)^n = 3^n$$

$$C = f(-1) = (1-1)^n = 0 \quad \text{car } n \geq 1 \text{ par hypothèse (rappelons que } 0^0 = 1)$$

3. Calculons $f'(x)$ de deux façons. D'une part $f(x) = (1+x)^n$ donc :

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

On a utilisé la formule : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$. D'autre part :

$$f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

Donc :

$$f'(x) = \binom{n}{1}x + 2\binom{n}{2}x + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

4. Avec la question précédente, on voit que :

$$D = f'(1) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

Exercice 2

- Pour l'achat des livres, l'ordre n'a pas d'importance. Toto choisit 3 livres de math parmi 10 et 2 bandes dessinées parmi 20. Donc le nombre de façons de faire ces achats est : $\binom{10}{3}\binom{20}{2} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times \frac{20 \times 19}{2} = 10 \times 3 \times 4 \times 10 \times 19 = 22800$.
- Ici l'ordre compte. Toto choisit un de ses 5 livres pour être le premier de la pile, puis un des 4 autres pour être le deuxième, etc. Il a donc $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5! = 120$ façons de constituer la pile.
- Dans cette question, Toto forme une pile avec ses 3 livres de math : il a $3 \times 2 = 6$ façons de le faire. Puis une pile avec ses bandes dessinées : il a 2 façons de le faire. Enfin, il place la pile de livres de math sous la pile de bande dessinées, mais il n'y a qu'une seule façon de faire cela. Il a donc $6 \times 2 = 12$ façons de constituer la pile de 5 livres.
- Ici, Toto forme une pile avec ses 3 livres de math (donc 6 façons de le faire, on l'a vu), une pile avec ses bandes dessinées (2 façons de le faire), puis il insère la pile de livre de math :
 - sous les bandes dessinées
 - ou bien entre les deux bandes dessinées
 - ou bien au dessus des bandes dessinéesFinalement, il a donc $6 \times 2 \times 3 = 36$ façons de constituer la pile.

Exercice 3

Cet exercice n'est pas corrigé en détail ; je donne seulement le résultat :

$$\forall n \in \mathbf{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 1+2n \end{pmatrix}$$