

Corrigé du devoir 1

Pierre BERNARD

17 septembre 2008

Exercice 1

1. $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$
2. $-x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. $\mathcal{S} = \{-1\}$.
3. Dans le cas où $a \neq -1$, l'équation E est du second degré. On voit que $x_1 = -1$ est une racine. Le produit des racines est $\frac{-1}{a+1}$, donc la seconde racine est $x_2 = \frac{1}{a+1}$. $\mathcal{S} = \{-1, \frac{1}{a+1}\}$.

Exercice 2

On pose $X = x^2$.

$$x^4 + x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 20 = 0$$

On reconnaît une équation du second degré et on voit que $X_1 = 4$ en est une racine. Le produit des racines est $X_1 X_2 = -20$ donc l'autre racine est $X_2 = -5$. Résolvons ensuite :

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

puis :

$$x^2 = -5 \text{ qui n'a pas de solution}$$

On en conclut que $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$.

Exercice 3

1. Elle est de degré deux si et seulement si $m \neq 11$.
2. On distingue deux cas :
 - Cas 1 : $m = 11$. L'équation E est alors $2(11 + 7)x + 11 + 5 = 0 \Leftrightarrow 36x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9}$. $\mathcal{S} = \{-\frac{4}{9}\}$.
 - Cas 2 : $m \neq 11$. L'équation E est alors du second degré. Son discriminant vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= (2(m+7))^2 - 4(m-11)(m+5) \\ &= 4((m+7)^2 - (m-11)(m+5)) \\ &= 4(m^2 + 14m + 49 - m^2 - 5m + 11m + 5) \\ &= 4(20m + 104) \\ &= 16(5m + 26)\end{aligned}$$

Résolvons $\Delta > 0 \Leftrightarrow 5m + 26 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{26}{5}$. On distingue donc trois cas :

- Cas 2.1 : $m > -\frac{26}{5}$. Il y a deux solutions qui sont :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-2(m+7) - \sqrt{16(5m+26)}}{2(m-11)} = \frac{-m-7-2\sqrt{5m+26}}{m-11} \\ x_2 &= \frac{-m-7+2\sqrt{5m+26}}{m-11}\end{aligned}$$

- Cas 2.2 : $m = -\frac{26}{5}$. Il y a une solution :

$$x_0 = \frac{-2(m+7)}{2(m-11)} = \frac{-m-7}{m-11} = \frac{\frac{26}{5}-7}{-\frac{26}{5}-11} = \frac{26-35}{-26-55} = \frac{-9}{-81} = \frac{1}{9}$$

- Cas 2.3 : $m < -\frac{26}{5}$. Il n'y a pas de solution.